SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV. — VOL. XI. — (Anno LXXX)

29 ottobre 1940 — 28 ottobre 1941 - XIX

NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO G. GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 24.566
1941-XIX

RELAZIONE

SUI LAVORI COMPIUTI DALLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE DELLA SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

DURANTE L'ANNO 1939-40 (XVIII)

letta nell'adunanza del dì 7 dicembre 1940 (XIX)

dal socio segretario **Geremia D'Erasmo**

Consoci,

Anche nello scorso anno 1939-40 (XVIII), così denso di eventi per la nostra patria, l'Accademia di Scienze fisiche e matematiche della Società Reale di Napoli ha continuato con l'abituale solerzia a svolgere la sua normale attività, testimoniata da pubblicazioni molteplici. Hanno infatti in questi ultimi mesi visto la luce un nuovo volume del Rendiconto (decimo della quarta serie), ricco di quasi 400 pagine, con numerose figure intercalate e 11 tavole; un grosso volume degli Atti (primo della serie terza), con 20 tavole e molte figure nel testo; e un Indice completo, che documenta e riassume *Due secoli di attività scientifica* del nostro Sodalizio, compilato per vostro incarico dal Segretario che vi parla.

Ricordando oggi succintamente, nella nostra consueta rassegna annuale, i principali frutti di quest'attività accademica, ci piace anzitutto notare il lavoro del consocio Carnera e del dott. Vocca, i quali, continuando le indagini eseguite negli anni precedenti, hanno per la quarta volta comunicato i risultati ricavati dall'Ufficio centrale delle Latitudini in base alle osservazioni eseguite nell'anno 1939 nelle otto Stazioni internazionali: risultati, che hanno permesso di dedurre la traiettoria percorsa dal polo di rotazione della terra.

In un campo affine di ricerche i dottori Guerrieri e Nicolini hanno riferito i risultati delle loro ricerche sopra le due viti, di ascensione retta e di declinazione, del micrometro impersonale del cerchio meridiano Repsold appartenente all'Osservatorio di Capodimonte, allo scopo di dedurre gli errori progressivi e periodici. Il metodo adoperato, consistente nel misurare col micrometro da studiare e con le varie parti delle viti relative, intervalli fissi di un comparatore, ha rivelato che detti errori risulano trascurabili.

Numerose note riguardano le matematiche pure ed applicate. Tre di

esse sono frutto dell' attività del socio corrispondente straniero SIERPINSKI, il quale in una ha dimostrato l' esistenza di spazi (V) separabili universali, numerabili o di potenza non inferiore a quella del continuo; in un' altra ha dato la dimostrazione, indipendente dall' ipotesi del continuo, dell' esistenza di un insieme lineare non numerabile dotato della proprietà λ'; ed in una terza ha fornito la definizione effettiva di una famiglia di $2^{\aleph_1}$ insiemi lineari tali che di due qualunque di essi uno sia parte dell' altro.

Altre quattro note sono dovute al socio corrispondente ANDREOLI. In una, *Sulla teoria delle sostituzioni generalizzate e dei loro gruppi generalizzati*, egli esamina certi enti che nascono dalla considerazione degli ordinari gruppi di sostituzioni, allorchè alcuni degli elementi sui quali questi operano, si suppongono venire a coincidere. In una seconda, *Sull' analisi statistica di fatti economici ed in generale di fenomeni di scambio*, viene sviluppata una ricerca metodologica connessa con lo studio di un fenomeno economico e vengono esaminate le possibilità di sviluppi. Sempre nel campo statistico, una terza nota, che si riferisce agli *aggregati in una collettività*, partendo da un' analisi del concetto di concentrazione statistica e dei tipi di carattere, permette di ampliare alcune definizioni statistiche e consente in tal modo l' inizio di ricerche su collettività di individui di secondo ordine. Il quarto lavoro, che si ricollega a precedenti ricerche statistiche e demografiche pubblicate ugualmente nei nostri Rendiconti, prende in esame un fondamentale problema di genetica, studiando lo *Schema statistico di evoluzione e di selezione in una collettività a monoibridismo mendeliano*, e giungendo, mediante una interpretazione probabilistica, a deduzioni che, mentre sono pienamente d' accordo con molti risultati sperimentali già acquisiti, consentono una perspicua veste geometrica.

Una nota del dott. Luigi AMERIO fornisce una generalizzazione della formula di RIEMANN per *l' inversione della trasformata di Laplace*, mediante la quale si può risalire dalla funzione trasformata $f(p)$ alla funzione trasformanda $F(t)$, facendo su quest' ultima le ipotesi più generali possibili.

Continuando le sue ricerche relative al *nuovo metodo per la geometria delle serie lineari delle curve algebriche*, pubblicate nel Rendiconto dell'anno precedente, il prof. Federico AMODEO ha studiato, in un secondo lavoro, le proprietà delle serie lineari segate sulle curve algebriche *singolari* C_p^m di qualunque ordine m e di qualunque genere p, cioè di quelle curve i cui punti doppi hanno un numero ρ di essi, le cui posizioni dipendono dalle posizioni degli altri.

Un esame delle *Proprietà gruppali nelle serie di Dirichlet* è contenuto nella nota del prof. Guido BARBA. In essa l' autore, messa in evidenza la necessità di imporre una condizione gruppale alle serie di DIRICHLET, ove le si voglia sottoporre agli ordinari procedimenti di calcolo, studia le proprietà

di tali serie di DIRICHLET gruppali e ne esamina le possibili generalizzazioni, tanto nel campo reale degli esponenti che in quello complesso.

Due note, riguardanti in prevalenza le equazioni differenziali, sono dovute alla dott. Maria DI BELLO. La prima di esse corrisponde all'interpretazione analitica di un fatto geometrico: costituito, questo, dalla considerazione di cerchi rappresentanti rette lobacewskiane, e dalla conseguente logica formazione di una equazione differenziale analoga a quella del CLAIRAUT. La seconda nota, di sviluppo della prima, estende questo risultato in due distinte forme, che poi si fondono in una sola quasi evidente.

In un lavoro sopra *Elementi matematici per l'economia corporativa*, il prof. Giuseppe PALOMBA prende in esame il processo di produzione nella sua concezione unitaria e sintetica, secondo la visione caratteristica che ne ha l'ordinamento corporativo italiano, ponendo il problema fondamentale, che consiste non solo nel rendere minimo il costo del prodotto riferito all'ultimo stadio di lavorazione, ma anche nel rendere più economico l'intero ciclo produttivo.

Sono state accolte due note del prof. Franco JOSSA. In una, riflettente la *Risoluzione progressiva di un sistema di equazioni lineari*, l'autore ha usato un procedimento, con la successiva introduzione delle incognite, analogo a quello che egli stesso aveva proposto per la risoluzione degli schemi meccanici iperstatici. Il metodo proposto si è manifestato particolarmente conveniente, sia perchè riduce il lavoro da compiere e risulta quindi più breve dei metodi abituali, sia perchè determina i valori delle incognite con un procedimento graduale, meno passibile di errori e più suscettibile di frequenti verifiche parziali. Nell'altra nota, che riguarda il *Calcolo di travi munite di appoggi elastici di notevole estensione*, viene indicato un metodo di prima approssimazione per risolvere rapidamente il problema, tanto nel caso, più semplice, di una trave con estesi appoggi su pilastri non collegati ad essa e che possono ritenersi elastici, quanto nel caso, più complesso, di strutture solidali, di cui la secondaria risenta, per effetto di lunghi appoggi sulle principali, riguardate come piastre poggiate su due lati, reazioni proporzionali agli abbassamenti, con coefficienti di proporzionalità variabili.

Altri due lavori sono dovuti al prof. Raffaele TARANTINI. Nel primo di essi, *Sulla ruota a disco di uniforme resistenza fuori del regime di progetto*, viene risoluto il problema della distribuzione delle tensioni nel disco di uniforme resistenza nel caso generale in cui esistano condizioni che non implichino necessariamente l'uniformità di tali tensioni, e vengono rese note molte proprietà della ruota utilizzante una porzione di tale disco, pervenendosi al calcolo diretto della velocità di scalettamento della ruota. Nel secondo lavoro, propedeutico al primo, *Sul progetto preliminare d'una ruota a disco d'uniforme resistenza*, viene esposto un procedimento sistematico di calcolo analitico, che permette di ridurre, oltre al numero dei

tentativi, anche il tempo ed il lavoro necessari, pur applicando alla corona ed al mozzo le formole dei dischi rotanti di spessore uniforme.

Passando a considerare le ricerche nel campo della chimica applicata ed industriale, ricordiamo due note del dott. Vittorio Cirilli e una dell'ing. Vincenzo Sollazzo. In un lavoro *Sull' impiego della termobilancia a registrazione continua nello studio della disidratazione termica di composti solidi idrati*, il dott. Cirilli descrive un apparecchio capace di tracciare automaticamente ed in maniera continua le curve perdita di peso-temperatura, nello studio del comportamento termico di una serie di composti idrati. Il dispositivo, che è basato sostanzialmente sulla composizione delle rotazioni di due specchi, uno dei quali è solidale con l'equipaggio mobile di un galvanometro, e l'altro con il giogo di una bilancia, non solo offre sensibilità pari a quella che dà l'analisi termica di precisione, ma ha il vantaggio di potersi adoperare anche con l'uso di piccole quantità di materiale, insufficienti per l'analisi termica. Nell'altra nota, che rappresenta un *Contributo alla conoscenza dei silicati e degli alluminati di calcio idrati*, lo stesso dott. Cirilli ha riferito i risultati dello studio, mediante misure calorimetriche, dei prodotti a rapporto CaO/SiO_2 variabile, ottenuti sia facendo reagire dell'acqua di calce su del gelo di silice, sia sottoponendo all'idrolisi progressiva il silicato tricalcico. È stata così confermata l'esistenza dei silicati: $CaO . SiO_2 . Acq$, e $3CaO . 2SiO_2 . Acq$. Ha poi determinato i calori di soluzione degli alluminati di calcio per le composizioni corrispondenti ai rapporti molecolari: $CaO/Al_2O_3 = 2, 3, 4$, e per gli idrati che ne derivano, riuscendo a stabilire che la disidratazione totale degli alluminati studiati provoca la loro scomposizione in trialluminato pentacalcico e ossido di calcio.

La nota dell'ing. Sollazzo *Sulla preparazione della Mullite per trattamento termico di miscele di caolino e allumina* riguarda infine l'influenza esercitata da alcune sostanze (CaF_2, Fe_2O_3, MgO) sulla trasformazione mullitica di miscele di caolino e allumina sottoposte a pressione elevata e quindi a trattamento termico: questione di notevole interesse tecnico per l'industria dei refrattari, date le ottime qualità dei refrattari mullitici e la grande scarsezza dei minerali naturali da cui essi si ricavano.

Di un processo elettrochimico, che ha pure grande interesse nella pratica industriale, ha particolarmente trattato l'ing. Mario Jacopetti nella sua nota sopra *L' attacco anodico della grafite nella elettrolisi dei cloruri alcalini*, descrivendo una piccola cella sperimentale impiegata per studiare il comportamento delle moderne grafiti. I risultati di una prima serie di esperienze hanno fatto conoscere come varia l'attacco anodico con il variare della concentrazione dell'anolita ed hanno dimostrato come si possa realizzare una circolazione dell'anolita favorevole nel ridurre l'attacco degli anodi di grafite.

Ricordando ora i lavori pubblicati nel campo delle discipline geofisiche e geologiche, dobbiamo anzitutto segnalare le ricerche del prof. Giuseppe Imbò, il quale, in una memoria inserita nel volume degli Atti, ha esaminata l'*Azione del vapore d'acqua nell'assorbimento della radiazione solare*, tenendo conto degli spessori di vapore attraversati dai raggi solari e del coefficiente d'assorbimento complessivo (diffusivo e selettivo) del vapore per i vari spessori; inoltre in una nota riflettente *Ricerche sulla misura della mobilità dei piccoli ioni atmosferici mediante l'apparecchio* Ebert-Mache ha precisato i criteri da seguire per il calcolo delle mobilità per i singoli gruppi di piccoli ioni, mentre con le osservazioni eseguite all'Osservatorio Vesuviano ha rilevato una stretta relazione tra mobilità e condizioni meteorologiche; ed infine in una terza nota riguardante *Ricerche geofisiche alle grotte di Pertosa* ha fornito una relazione delle osservazioni sul numero di piccoli ioni e sulle radiazioni penetranti, eseguite in due stazioni diverse di quelle grotte.

Della medesima grotta di Pertosa, già nota per precedenti indagini speleologiche e paletnologiche, ha fornito una breve descrizione geologica il dott. Giovanni Flores, in una nota *(Appunti geologici sulla grotta di Pertosa)*, nella quale si ferma a considerare l'origine delle acque, che ne percorsero o ne percorrono tuttora le diverse cavità, i fenomeni carsici superficiali, che si riscontrano negli immediati dintorni, e le principali particolarità e fenomeni dei vari antri e cunicoli sotterranei.

L'eruzione del Vesuvio del 79 d. C. è stata oggetto di una speciale memoria del dott. Giuseppe Mirigliano, inserita nel volume degli Atti. In base ai dati forniti dallo studio petrografico dei materiali di quell'eruzione e alle indagini geologiche condotte tanto nel territorio di Ercolano e di Pompei, quanto sul complesso vulcanico del Somma-Vesuvio, l'A. desume le modalità dell'eruzione pliniana, e porta nuovi contributi in appoggio all'ipotesi del seppellimento per via subaerea di Ercolano, precedentemente propugnata, contro il parere di vari geologi ed archeologi, dal De Lorenzo.

Fra le più notevoli comunicazioni verbali, con cui alcuni colleghi hanno voluto opportunamente ricordare la priorità di studiosi italiani in determinate ricerche o dare notizia delle indagini personali in corso e dei primi risultati raggiunti, mi piace segnalare quella del socio Andreoli, che a proposito di un recente studio matematico sulla legge di cicatrizzazione delle piaghe ha voluto richiamare le analoghe e più ampie ricerche sviluppate prima della guerra mondiale dal nostro compianto Paolo Della Valle tanto su questo argomento quanto sulla rigenerazione della coda negli Urodeli. Un'altra comunicazione verbale dello stesso consocio, che si collega a sue precedenti ricerche statistiche e a problemi di genetica, riguarda una possibile schematizzazione unitaria dell'eredità Mendeliana a proposito dei

caratteri multiplamente allelomorfi e del comportamento degli alleli multipli negli incroci.

Come negli anni decorsi, il nostro Sodalizio non ha mancato di partecipare alle principali manifestazioni della vita culturale del paese: così, fra l'altro, si è fatto rappresentare da vari consoci al secondo congresso nazionale dell'Unione Matematica Italiana, tenuto a Bologna nello scorso aprile.

Nei primi mesi dello scorso anno accademico sono venuti a scadere tre concorsi a premio. Per quello al premio quinquennale Gabriele e Ruggero Torelli, destinato ai giovani laureati in matematica pura, l'Accademia, accogliendo le proposte della Commissione Carnera, Andreoli e Pascal, assegnò all'unica concorrente, dott. Maria Di Bello, un incoraggiamento di L. 500.—, riservando le residuali lire 500.— ad incremento del fondo destinato al prossimo premio. Per il concorso al premio biennale Sementini, riguardante lavori di Chimica applicata, su conforme parere della Commissione Giordani, Bakunin e Malquori, vennero assegnate le lire mille disponibili al concorrente dott. Alessandro Rossi per la memoria manoscritta da lui presentata *Sulla costituzione chimica della mioglobina*. Per quanto riguarda infine il premio annuale Filippo Cavolini per memorie di scienze biologiche, l'Accademia, approvando le conclusioni della Commissione Pierantoni, Diamare e Zirpolo, proclamò vincitore, fra i due concorrenti che vi avevano partecipato, l'autore della memoria manoscritta sopra *Gli organi sessuali di Eusicyonia carinata* Olivi, che risultò essere il prof. Arturo Palombi.

Una grave perdita ha dovuto lamentare l'Accademia in quest'ultimo anno, con la scomparsa di Ernesto Pascal, decano fra i suoi soci ordinari della sezione di scienze matematiche, alla quale apparteneva dall'anno 1909. Allorchè io, il 13 gennaio ultimo, per debito d'ufficio tracciavo ai colleghi questa consueta rassegna annuale della nostra attività scientifica, Egli era ancora là, quasi di fronte a me, col suo solito sorriso doloroso, reso più doloroso in questi ultimi anni da molteplici amarezze e sventure sofferte. Pochi giorni appresso, il 25 gennaio 1940, silenziosamente dileguavasi, a 75 anni, nella pace del sepolcro il nostro venerato Maestro e Collega, che a quest'Accademia aveva dato, per quasi mezzo secolo, non solo i frutti migliori del suo versatile ingegno con una quarantina di memorie e note inserite nei nostri Atti e Rendiconti, ma anche numerose altre prove del suo attaccamento e della sua attività, ricoprendo per vari anni le cariche di presidente, di vice-presidente, di segretario e di tesoriere, sempre e dapertutto recando l'inconfondibile sua caratteristica del dovere altamente sentito e religiosamente compiuto.

Dell'efficacia dei suoi insegnamenti di calcolo infinitesimale, analisi algebrica, analisi superiore e matematiche superiori, e dell'orma da lui lasciata con la sua varia e copiosa produzione scientifica abbracciante ben

262 numeri nei più svariati campi dell'analisi matematica ha già detto efficacemente l'Eccellenza Severi commemorandolo nella R. Accademia d'Italia, e sarà degnamente trattato nella doverosa rievocazione, che dello scomparso farà nella nostra Accademia il consocio Picone; ma anche in questo fugace cenno odierno chi vi parla non può fare a meno di ricordare l'appassionato fervore, l'instancabile attività, il costante entusiasmo che caratterizzarono lo scienziato; la sagacia organizzativa, la facilità assimilatrice, la lucidità espositrice che caratterizzarono il Maestro; la rettitudine assoluta, la fedeltà indiscussa, l'affettuosa delicatezza che caratterizzarono il cittadino ed il padre. Dei due figli, Alberto, il giovane eroe che sacrificò nei cieli della patria la sua ventitreenne esistenza, vive ancora tra noi con i suoi primi e già promettenti lavori di matematica, che il padre volle, or sono pochi anni, donare all'Accademia in apposito volume; Mario, che è nostro apprezzato consocio e collaboratore, continua le nobili tradizioni scientifiche familiari specialmente nei campi della idro- ed aero-meccanica. Associando al nome dello scomparso quello dei due figliuoli, che insieme con la scienza costituirono lo scopo supremo della sua esistenza, noi sentiamo di rendere l'omaggio più caro alla memoria dell'insigne e benemerito Collega, a cui si rivolge il nostro mesto e reverente saluto.

Prima di chiudere il mio dire, mi corre ancora l'obbligo di ricordare, che nel giugno scorso l'Accademia propose, e nel settembre il Ministro della Educazione Nazionale approvò la nomina, al posto vacante di socio corrispondente straniero nella sezione di scienze matematiche, del prof. Ignacio Manuel Azevedo do Amaral, ordinario di geometria analitica e calcolo infinitesimale nella Scuola nazionale d'Ingegneria del Brasile e presidente dell'Accademia brasiliana delle Scienze.

Consoci,

l'anno accademico 1939-40 si è chiuso mentre tutte le forze d'Italia lavorano per assicurarle la totale indipendenza politica ed economica e per gettare le basi di un nuovo e più equo ordine europeo. Non sòlo chi ha il privilegio di servire la patria in armi, ma anche coloro che, come noi, per l'inesorabile peso degli anni, sono rimasti ad attendere alle abituali occupazioni, tutti si sentono egualmente mobilitati, lieti e fieri di cooperare, con tutte le proprie energie comunque e dovunque rivolte, al raggiungimento della meta comune, che è la maggiore grandezza dell'Italia nostra.

Con questa fede sicura abbiamo iniziato i lavori dell'anno XIX; essa ci sorreggerà nell'adempimento di ogni dovere e renderà più lieve ogni sacrificio fino all'immancabile vittoria!

Sull' assorbimento ottico nel visibile di ossidi e solfati di praseodimio, neodimio ed erbio

Nota del dott. **Giuseppe Cena**, *presentata dal socio* **A. Carrelli**

(Adunanza del dì 9 novembre 1940 - XIX)

Sunto. — In questa nota esponiamo alcuni risultati ottenuti sul comportamento, al variare della temperatura, di righe situate nella zona visibile di ossidi e solfati di Pr, Nd ed Er; [Pr_2O_3; Nd_2O_3; Er_2O_3; $Pr_2(SO_4)_3 \cdot 8H_2O$; $Nd_2(SO_4)_3 \cdot 8H_2O$].

Lo studio dell' assorbimento ottico, nel visibile, di alcuni ossidi e solfati di terre rare é precisamente Pr_2O_3; Nd_2O_3; Ec_2O_3; $Pr_2(SO_4)_3 \cdot 8H_2O$; $Nd_2(SO_4)_3 \cdot 8H_2O$ è stato fatto indirettamente: si è infatti illuminata intensamente la sostanza disposta su una laminetta metallica e si è fotografata la luce diffusa da questi corpi. È noto dalle ricerche di altri autori che le sostanze esaminate presentano un gran numero di bande sottili di assorbimento; a tali bande di assorbimento sono naturalmente connesse anomalie dell'indice di rifrazione e conseguentemente, per la teoria elettromagnetica, si devono riscontrare variazioni notevoli del potere riflettente. In effetti con tale metodo si sono ottenuti nettamente visibili minimi della intensità della luce diffusa da queste sostanze, minimi che permettono di ottenere le frequenze caratteristiche; di queste si sono avute naturalmente solo le principali, quindi il metodo che abbiamo attuato si presta, com'è nel caso nostro, per misure di orientamento e per scopi speciali.

È stato usato infatti questo dispositivo perchè riscaldando la laminetta si poteva ottenere facilmente la variazione prodotta dall' aumento di temperatura sull' intensità e sulla posizione dei centri assorbenti.

Come apparecchio dispersivo è servito uno spettrografo Hilger con prisma a deviazione costante, avente una dispersione di circa 100 Å/mm. nel rosso e di circa 20 Å/mm. nel violetto. Per la determinazione della posizione dei singoli massimi di assorbimento abbiamo adoperato uno spettro campione ed uno spettrocomparatore Zeiss.

Gli ioni delle terre rare mostrano, com' è noto, negli spettri di assorbimento dei loro composti solidi, delle righe di assorbimento molto sottili [1], [2], [3]; tale aspetto è ancora più marcato alle temperature molto basse. È noto

---

[1]) Lehmann, Ann. der Phys. 34, 389, 1939.

[2]) Merz, Ann. der Phys. 28, 569, 1937.

[3]) Lange, Ann. der Phys. 31, 609, 1938.

pure che tali spettri di assorbimento a righe si connettono con lo strato elettronico N (orbite $4f$) che viene protetto dalle perturbazioni esterne dagli strati elettronici O e P. Le righe d'assorbimento degli ioni delle terre rare sono state spiegate come salti che avvengono nell'interno dello strato N.

Praseodimio. L'ione Pr, il cui strato ha due elettroni, è certamente l'ione più conosciuto. Per il Pr sono possibili i seguenti gruppi di righe: ^3H–^3P, ^3H–^1I, ^3H–^1G [4]). L'ossido di Pr da noi studiato, a temperatura ordinaria, presenta le seguenti righe:

Ossido di Pr	
cm^{-1}	intensità
20160	molto debole
20325	media, netta
20720	molto debole
21200	molto debole
21250	molto debole
21905	molto debole

Purtroppo questo composto, scaldato, passa ad ossido superiore; abbiamo quindi analizzato il solfato che dà le righe seguenti, le quali sono in parte diverse da quelle dell'ossido, ma fortunatamente sono tutte classificate [5]) [6]):

Solfato di Pr		
cm^{-1}	classificazione	caratteristiche
16700		molto debole
16800	$^3H_4 - {}^1G_4$	molto debole
16960		debole
17075		debolissima
17150	$^3H_4 - {}^1I_6$	debolissima
20720		netta, sottilissima, intensa
20795	$^3H_4 - {}^3P_0$	intensa, nettissima
21200		debolissima, sfumata
21250	$^3H_4 - {}^3P_1$	debole, sfumata
da 22325 a 22720	$^3H_4 - {}^3P_2$	intensa, ampia, sfumata, sdoppiata

[4]) Altri autori hanno trovato che i termini possibili per il Pr sono in tutto sette (Gibbs, Wilber e White, Phys. Rev. 29, 790).

[5]) Gobrecht, Ann. der Phys. 28, 673, 1937 e Phys. Zeit. 37, 549, 1936.

[6]) Joos, Erg. Ex. Nat. 78, 1939.

Portando il solfato alla temperatura di circa 200°C si ha la scomparsa di tutti i gruppi di righe, ad eccezione di uno solo; in effetti si osserva soltanto una riga fortemente sbiadita e sfumata che corrisponde al salto ${}^3H_4 - {}^3P_0$. Si conclude da qui che i termini G, I ed inoltre i termini ${}^3P_1$ e ${}^3P_2$ sono più sensibili all'aumento della temperatura nel senso che per effetto della perturbazione dovuta alle aumentate oscillazioni reticolari, la possibilità di salti elettronici che portano ai valori di j relativi ai termini suddetti scompare.

A questo diverso comportamento dei gruppi di righe con l'aumento della temperatura si accompagna, per il gruppo superstite, un lievissimo spostamento verso il violetto. Questo spostamento sarebbe confermato da quello verso il rosso osservato da altri autori nel passaggio verso basse temperature [7]).

Neodimio. Abbiamo esaminato due composti di questo elemento, il solfato e l'ossido. Qui i gruppi di righe intense sono affiancati da numerose altre righe debolissime che non è possibile collegare ad essi e che, appunto per la loro scarsissima intensità, non possono senz'altro spiegarsi come salti elettronici. Secondo Ewald [8]) queste righe si possono spiegare come combinazione di salti elettronici con oscillazioni reticolari.

Ecco i risultati per il solfato di Nd a temperatura ambiente con la loro classificazione proposta da Ewald che non porta però ad una interpretazione effettiva delle varie righe.

Solfato di Nd			
cm^{-1}	caratteristiche	cm^{-1}	caratteristiche
16850	debole e diffusa	18970	debole e sottile
16970	debole e diffusa	19100	intensa e sottile, E
17030	debole e diffusa	19170	intensa e sottile, E
17150	intensa e sottile, D	19390	coppia di righe deboli e diffuse
17220	intensa e sottile, D	19560	debole e sottile, F
17300	intensa e sottile, D	21060	debole e sottile, G
17450	debole e sottile, D	21275	intensa e sottile, G
17500	intensa e sottile, D	23100	debole e sottile
18820	debole e diffuse	23350	intensa e sottile

Si presenta per noi una riga intensa e sottile a circa 23350 $cm.^{-1}$ che non si riscontra nelle ricerche di Ewald. Come si vede nelle tabelle si hanno tre specie di righe; le righe classificate come « intense e sottili » sono spiegate come semplici salti elettronici. Per le righe « deboli e sot-

[7]) Merz, l. c.

[8]) Ewald, Ann. der phys. 34, 209, 1939.

tili » ci sono dubbi che esse possano attribuirsi a salti elettronici; esse rispetto alle righe intense, sono spostate verso le piccole lunghezze d'onda e gli spostamenti sono in accordo con le frequenze proprie degli anioni contenuti nel cristallo [9]) per cui si ritiene che esse corrispondano a combinazioni tra i salti elettronici dell'ione Nd e le frequenze proprie degli anioni del sale o dell'acqua di cristallizzazione [10]). Infine le righe del terzo tipo (« deboli e diffuse ») si attribuiscono a combinazioni di salti elettronici e di frequenze di oscillazioni reticolari.

Ad alta temperatura ($\sim$ 200°C) abbiamo osservato per il solfato di Nd la totale scomparsa delle righe « deboli e diffuse » e delle « deboli e sottili ». Delle righe dovute a salti elettronici persistono i gruppi D ed E, il primo sotto forma di un'ampia sfumatura, leggermente spostata verso le piccole lunghezze d'onda, il secondo assai debole e sbiadito. Nessuna traccia v'è delle altre righe, neppure del massimo a 23350 cm.$^{-1}$ che a temperatura ambiente è molto intenso.

L'ossido presenta rispetto al solfato delle differenze tanto nello spettro osservato a temperatura ambiente, quanto nella variazione che questo subisce con l'aumento di temperatura. Ecco i risultati ottenuti a temperatura ambiente:

Ossido di Nd	
cm^{-1}	intensità e caratteristiche
16750	debole e diffusa
17030	debole e diffusa
17150	intensa e sottile, D
17310	intensa e sottile, D; spostata rispetto al solfato
17420	intensa e sottile, D; spostata rispetto al solfato
18710	debole e diffusa
18870	debole e diffusa
19110	intensa e sottile, E; spostata rispetto al solfato
19135	intensa e sottile, E; spostata rispetto al solfato
19370	doppietto di righe deboli e sottili, F
19590	doppietto di righe deboli e diffuse
19900	debolissima e diffusa
20720	debole e diffusa
20800	debole e diffusa
21240	debole e sottile, G
23350	intensa e sottile

A temperatura elevata, l'ossido di Nd mostra ancora la totale scomparsa delle righe deboli; ma i gruppi intensi sono tutti presenti ed in questo sta la differenza dal solfato. Nell'ossido dunque si ha la presenza

[9]) Ewald, l. c.

[10]) Hellwege, Z. Phys. 118. 192.

a temperatura elevata di tutti e soli i gruppi di righe intense, compresa la 23350 $cm.^{-1}$.

Concludendo, per quello che riguarda il neodimio si osserva che mentre per il solfato quando si passa a temperatura elevata sono visibili solo alcune righe « intense e sottili » cioè quelle determinate da salti elettronici, per l'ossido queste sono tutte visibili a temperatura elevata. In particolare la riga « intensa e sottile » nettissima e comune ai due composti, situata a 23350 $cm.^{-1}$ scompare nel passaggio ad alta temperatura per il solfato, rimane un po' sfumata, ma visibile, per l'ossido.

Erbio. L'ossido di erbio dà, a temperatura ambiente, cinque righe sottilissime e deboli, di cui si danno qui le frequenze:

Ossido di Er	
cm^{-1}	intensità e caratteristiche
19000	debolissima e sottilissima
19150	debole e sottilissima
19225	debole e sottilissima
21890	debolissima e sottilissima
22320	debolissima e sottilissima

Di queste solo le due meno deboli, cioè la 19150 $cm.^{-1}$ e la 19225 $cm.^{-1}$ sono presenti alla temperatura di 200°C.

Al Prof. A. Carrelli, cui devo la realizzazione di questo lavoro, esprimo la più viva gratitudine.

Napoli, Istituto di Fisica sperimentale della R. Università, Giugno 1940 - XVIII

Nuovi metodi simbolici in elettrotecnica

Nota del dott. ing. **Lucio Vallese**, *presentata dal socio corr.* **G. Andreoli**

(Adunanza del dì 9 novembre 1940 - XIX)

Sunto. — Si esamina il comportamento a regime di un circuito elettrico a caratteristiche costanti, alimentato in serie da tensioni di natura iperbolica od iperbolico-circolare. L'esame di tale comportamento viene facilitato mediante l'introduzione di nuovi metodi simbolici, basati sui numeri pseudocomplessi ed ipercomplessi, analoghi nella formulazione a quello di Helmholtz per le grandezze funzioni circolari del tempo. Viene inoltre proposto l'uso di abachi per il calcolo dell'impedenza circolare, iperbolica od iperbolica-circolare.

1. — *Generalità.*

Il comportamento di un circuito elettrico composto di induttanza, capacità e resistenza in serie, sollecitato da una perturbazione di tipo qualunque, è retto dalla equazione differenziale lineare:

$$L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int idt+Ri=v.$$

Il calcolo effettivo della soluzione di questa equazione, nella ipotesi che le caratteristiche L, C, R siano costanti, è relativamente agevole quando la tensione v è una funzione circolare del tempo. Spesso, anzi, risulta vantaggiosa una semplificazione dei calcoli che si ottiene adoperando il metodo simbolico introdotto da Helmholtz e Rayleigh. Per questa ragione si è determinata una certa tendenza a ricondurre le grandezze che si presentano nei fenomeni della pratica a grandezze circolari, ricorrendo a rappresentazioni mediante la serie o l'integrale di Fourier [1]) delle funzioni analitiche corrispondenti.

In pratica si presenta frequentemente il caso di perturbazioni non circolari, di carattere esponenziale. Ora ragioni di uniformità di trattazione e anche di effettiva semplicità di risoluzione consigliano di eseguire direttamente lo studio analitico dei problemi in cui si presentano grandezze espo-

---

[1]) Sartori R, *L'integrale di Fourier*. (Alta Frequenza, agosto-settembre 1940, pagg. 531-552).

nenziali semplici, riconducibili a grandezze iperboliche. Analogamente al metodo di Helmholtz è possibile stabilire con l'ausilio di una unità u di natura diversa da j un nuovo metodo simbolico che semplifica grandemente i calcoli relativi. Dalla considerazione, poi, dei due metodi simbolici è possibile derivarne un terzo a tre unità immaginarie per l'esame generale dei fenomeni in cui si presentano grandezze esponenziali composte.

I fenomeni di carattere iperbolico presentano notevole interesse per la teoria e per la pratica, non solo per i casi numerosi in cui si ha a che fare con essi direttamente, ma anche perchè ad essi è possibile ricondurre ogni grandezza generica ricorrendo ad una rappresentazione mediante la serie di Dirichelet o l'integrale di Laplace [2]).

È da notare che, mentre i fenomeni circolari corrispondono alla proiezione su uno degli assi cartesiani dell'estremo di un vettore uscente dalla origine che, ruotando ad una data velocità areolare o anche angolare ω, descrive un cerchio di dato raggio, i fenomeni iperbolici corrispondono alla proiezione su un asse cartesiano dell'estremo di un vettore che, ruotando ad una data velocità areolare [3]) σ, descrive un'iperbole equilatera di dato asse. Poichè, com'è noto, i metodi simbolici si basano sulla rappresentazione analitica del diagramma polare, ne segue che, mentre il metodo di Helmholtz si appoggia alla geometria euclidea o circolare, quello che ora si vuole stabilire si appoggerà alla geometria iperbolica speciale.

2. — *Metodo simbolico circolare.*

È noto che, quando in un problema si presentano grandezze variabili che siano tutte funzioni circolari del tempo di ugual pulsazione, è possibile rappresentarle graficamente mediante un diagramma vettoriale ed eseguire su di esse le operazioni di somma e sottrazione; ciò in base alla corrispondenza biunivoca fra le coordinate dei punti di una sinusoide e gli angoli formati rispetto ad una direzione di riferimento da un vettore di ampiezza costante, ruotante con velocità pari alla pulsazione. Ad ogni sinusoide si fa corrispondere un vettore, caratterizzato in ampiezza e fase, e su questi si opera con la regola del parallelogramma.

Volendo avere una traduzione analitica della rappresentazione grafica, si attribuisce alle componenti verticali di ogni vettore un fattore simbolico

---

[2]) È noto che le grandezze iperboliche possono essere rappresentate mediante la serie di Dirichelet o mediante l'integrale di Laplace. In generale il passaggio attraverso l'unità immaginaria lega i due sviluppi distinti nel campo reale.

[3]) Le velocità di rotazione sono areolari; mentre nel caso del cerchio a settori uguali corrispondono archi uguali, nel caso dell'iperbole ciò non si verifica.

j per distinguerle dalle componenti orizzontali, e si rappresenta ogni grandezza con una espressione del tipo

$$\overline{A} = a + jb$$

ove, se A_m è l'ampiezza del vettore, si ha:

$$a = A_m \cos \varphi$$
$$b = A_m \operatorname{sen} \varphi.$$

L'espressione precedente si può perciò anche scrivere equivalentemente:

$$\overline{A} = A_m (\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi) = A_m e^{j\varphi},$$

applicando le note relazioni di Eulero fra funzioni circolari ed esponenziali.

Poichè un vettore giacente sull'asse orizzontale assume, se ruotato positivamente di $\frac{\pi}{2}$, il fattore j, quest'ultimo deve intendersi come un operatore che ruota di $\frac{\pi}{2}$ nel senso positivo ogni vettore a cui viene applicato. Esso ha pure un significato numerico; infatti ruotando il vettore $\overline{A} = a + jb$ di $+\frac{\pi}{2}$ si ha il vettore $\overline{A'} = -b + ja$, ma dovendo essere, peraltro, $\overline{A'} = j\overline{A} = ja + j^2 b$, segue:

$$j^2 = -1.$$

Il metodo simbolico consiste nell'eseguire le varie operazioni sui vettori analiticamente, operando sulle rispettive componenti. Ogni vettore viene rappresentato mediante un numero complesso e i procedimenti di calcolo, alla cui base è la condizione $j^2 = -1$, sono quelli già noti dalla teoria di questi ultimi. Da ogni espresione simbolica del tipo $\overline{A} = a + jb$ si deduce così il modulo $\sqrt{a^2 + b^2}$ e l'angolo di fase rispetto alla direzione di riferimento $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$.

Il metodo simbolico non è legato, come quello vettoriale da cui è sorto, alla condizione di ugual pulsazione, perchè è sempre possibile rappresentare analiticamente grandezze di pulsazioni diverse; così è possibile fra l'altro calcolare prodotti e quozienti. Per queste ultime operazioni risulta più conveniente la rappresentazione dei vettori sotto la forma esponenziale $\overline{A} = A_m e^{j\varphi}$.

3. — *Metodo simbolico iperbolico.*

Supponiamo di dover risolvere un problema in cui le grandezze variabili siano funzioni iperboliche del tempo [4]) :

$$a = K_1\, Ch\sigma t + K_2\, Sh\sigma t = A_m\, Ch\,(\sigma t + \gamma).$$

---

[4]) In una grandezza iperbolica del tipo

$$a = A_m\, Sh\,(\sigma t - \gamma)$$

oppure

$$a' = A_m\, Ch\,(\sigma t - \gamma)$$

chiameremo A_m ampiezza, σ pseudopulsazione o pulsazione iperbolica, γ argomento. Essa può essere considerata come grandezza periodica di periodo immaginario $j2\pi$. Il suo valore medio nel semiperiodo è $j\,\frac{2}{\pi}\,A_m$, essendo, secondo i casi,

$$a_{med} = \frac{1}{j\pi}\int_{\sigma t=0}^{\sigma t=j\pi} A_m \cdot Sh\sigma t \cdot d\sigma t = j\,\frac{2}{\pi}\,A_m$$

$$a'_{med} = \frac{1}{j\pi}\int_{\sigma t=j\frac{\pi}{2}}^{\sigma t=j\frac{3}{2}} A_m\, Ch\sigma t\, d\sigma t = j\,\frac{2}{\pi}\,A_m\,;$$

il suo valore efficace è $j\,\frac{A_m}{\sqrt{2}}$ essendo :

$$A = \sqrt{\frac{1}{2\pi j}\int_0^{2\pi j} a^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi j}\,A_m^2\int_0^{2\pi j}\frac{-1 + Ch\,2\sigma t}{2}\,d\sigma t} = j\,\frac{A_m}{\sqrt{2}}.$$

Il prodotto di due grandezze iperboliche

$$a = A_m\, Sh\,(\sigma_1 t + \gamma_1)$$
$$b = B_m\, Sh\,(\sigma_2 t + \gamma_2)$$

è la grandezza iperbolica

$$ab = \frac{A_m B_m}{2}\left\{ Ch\,[(\sigma_1 + \sigma_2)\,t + \gamma_1 + \gamma_2] - Ch\,[(\sigma_1 - \sigma_2)\,t + (\gamma_1 - \gamma_2)]\right\}.$$

Sapendo che si può stabilire una corrispondenza biunivoca fra le coordinate dei punti di una sinusoide iperbolica ed un raggio vettore di data ampiezza, ruotante in un piano iperbolico con velocità areolare costante pari alla pseudopulsazione, è possibile istituire una rappresentazione grafica delle grandezze in esame. A grandezze diverse, di ugual pseudopulsazione, corrisponderanno vettori facenti fra di loro un angolo pari alla differenza di fase delle due grandezze, angolo che conserveranno nel tempo perchè ruotano con la stessa velocità. Si potranno così eseguire graficamente le operazioni di somma e di sottrazione, limitandosi alla considerazione di un istante generico t. Volendo una traduzione analitica della rappresentazione grafica, si indicherà ogni vettore con una espressione del tipo:

$$\overline{A} = x + uy$$

caratterizzando col simbolo u le componenti verticali. Se A_m è l'ampiezza del vettore si ha:

$$\begin{cases} x = A_m \, Ch\, \gamma \\ y = A_m \, Sh\, \gamma \end{cases}$$

per cui si può anche scrivere equivalentemente:

$$\overline{A} = A_m (Ch\gamma + u\, Sh\gamma) = A_m e^{u\gamma},$$

applicando le relazioni fra funzioni iperboliche ed esponenziali.

Poichè un vettore giacente sull'asse orizzontale assume, se ruotato positivamente di $j\frac{\pi}{2}$ il fattore u, quest'ultimo deve intendersi come un operatore che ruota di $+j\frac{\pi}{2}$ ogni vettore a cui viene applicato, facendolo passare da un quadrante al successivo. In quanto al suo significato numerico si deve osservare che un vettore $\overline{OM} = m_1 + um_2$ ruotato di $+j\frac{\pi}{2}$ assume la posizione $\overline{OX}$ simmetrica di $\overline{OM}$ rispetto alla retta isotropa e tale che $(\overline{OM}, \overline{OX}, r_1, r_2) = -1$. $\overline{OX}$ si trova nel quadrante contiguo ed ha per coordinate m_2 ed um_1

$$\overline{OX} = m_2 + um_1.$$

Il suo valore medio nel periodo è nullo se le due pulsazioni sono diverse, e vale, invece,

$$-\frac{A_m B_m}{2} Ch\,(\gamma_1 - \gamma_2) = +AB\, Ch\,(\gamma_1 - \gamma_2)$$

se esse sono uguali.

Essendo, peraltro, $\overline{OX} = u\overline{OM} = um_1 + u^2 m_2$ si deduce:

$$u^2 = +1.$$

Nel metodo simbolico iperbolico ogni grandezza viene dunque ad essere rappresentata da un numero che chiameremo pseudocomplesso

$$\overline{A} = x + uy$$

caratterizzato dal modulo $\sqrt{x^2 - y^2}$ e dall'argomento $\gamma = \text{Sett Th } \frac{y}{x}$. Cade, anche in questo metodo come in quello circolare, il vincolo della uguale pseudopulsazione e perciò è possibile, fra l'altro, eseguire le operazioni di prodotto e di quoziente; per queste ultime risulta particolarmente conveniente la rappresentazione dei vettori sotto la forma esponenziale:

$$\overline{A} = A_m e^{u\gamma}.$$

In base alla condizione $u^2 = +1$ si deducono facilmente le regole di calcolo a cui sottostanno i numeri pseudocomplessi; la condizione di uguaglianza si ha quando e solo quando sono uguali le parti reali e quelle pseudoimmaginarie, Si diranno inoltre coniugati due numeri pseudocomplessi che differiscono per il segno della parte pseudoimmaginaria; essi hanno ampiezze uguali ed argomenti uguali e di segno contrario. Il loro prodotto è reale e pari al quadrato del modulo.

4. — *Applicazione con le funzioni circolari e con quelle iperboliche.*

a) Ad un circuito elettrico, contenente in serie resistenza, induttanza e capacità costanti, sia applicata un'onda di tensione variabile circolarmente col tempo:

$$v = V_m \operatorname{sen} \omega t$$

o, simbolicamente:

$$\overline{V} = V_m e^{j\omega t}.$$

L'equazione differenziale del circuito:

$$(1) \qquad v = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i dt$$

ha un integrale particolare della forma:

$$i = I_m \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$$

o anche

$$\overline{I} = I_m e^{j(\omega t - \varphi)}$$

che corrisponde alla condizione di regime. Sostituendo quest'ultima espressione nella (1) si deduce, com'è noto,

$$\frac{V_m}{I_m} e^{j\varphi} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

da cui

$$\frac{V_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = Z_c \quad , \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

L'espressione Z_c è l'impedenza del circuito per le correnti circolari. Essa assume il valore minimo $Z_c = R$, per la pulsazione $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ a cui corrisponde l'annullamento della reattanza.

b) Supponiamo ora che l'onda di tensione applicata al circuito precedente sia una funzione iperbolica del tempo:

$$v = V_m Sh\sigma t \quad \text{o anche} \quad v = V_m Ch\sigma t.$$

La (1) ha allora un integrale particolare della forma:

$$i = I_m Sh(\sigma t - \gamma) \quad \text{o, rispettivamente,} \quad i = I_m Ch(\sigma t - \gamma);$$

simbolicamente scriveremo

$$\overline{V} = V_m e^{u\sigma t} \quad ; \quad \overline{I} = I_m e^{u(\sigma t - \gamma)}.$$

Sostituendo le espressioni precedenti nella (1) si possono determinare i valori di I_m e di γ con metodo trigonometrico o simbolico, secondo i casi.

Con il metodo trigonometrico si raggruppano i termini aventi a fattore $Sh\sigma t$ e $Ch\sigma t$, ottenendo così un'identità che deve risultare verificata da tutti i valori del tempo. In particolare, ponendo una volta $t = j(2k+1)\frac{\pi}{2\sigma}$ e poi $t = jk\frac{\pi}{\sigma}$ si annullano rispettivamente $Ch\sigma t$ e $Sh\sigma t$, e noi otterremo così due equazioni indipendenti con le incognite I_m e γ.

Si ha in tal modo dalla (1):

$$V_m = R I_m Ch\gamma - \left(\sigma L + \frac{1}{\sigma C}\right) I_m Sh\gamma$$

$$0 = -R I_m Sh\gamma + \left(\sigma L + \frac{1}{\sigma C}\right) I_m Ch\gamma.$$

Ne segue

$$\frac{V_m}{I_m} = \sqrt{R^2 - \left(\sigma L + \frac{1}{\sigma C}\right)^2} = Z_i \quad , \quad Th\gamma = \frac{\sigma L + \frac{1}{\sigma C}}{R}.$$

Con il metodo simbolico si ha senz'altro:

$$V_m e^{u\sigma t} = R\ I_m e^{u(\sigma t - \gamma)} + u\sigma L I_m e^{u(\sigma t - \gamma)} + \frac{1}{u\sigma C} I_m\, ^{u(\sigma t - \gamma)}$$

che si può scrivere, eliminando il fattore comune $e^{u\sigma t}$ e ricordando che $\frac{1}{u} = u$:

$$\frac{V_m}{I_m} e^{u\gamma} = R + u\left(\sigma L + \frac{1}{\sigma C}\right).$$

Ne segue:

$$\frac{V_m}{I_m} = \sqrt{R^2 - \left(\sigma L + \frac{1}{\sigma C}\right)^2} = Z_i \quad , \quad Th\gamma = \frac{\sigma L + \frac{1}{\sigma C}}{R}.$$

L'espressione Z_i è l'impedenza del circuito per le correnti iperboliche; essa presenta due punti di zero per le pseudopulsazioni

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{01}\\ \sigma_{02}\end{matrix}\right\} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

fra i quali è compreso un punto di massimo per la pseudopulsazione

$$\sigma_M = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

I valori σ_0 possono essere reali e distinti, reali e coincidenti o complessi coniugati secondochè il radicando $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}$ è $\gtrless 0$; nel primo caso la Z_i è reale per i valori di pseudopulsazioni comprese nell'intervallo $(\sigma_{01}, \sigma_{02})$ e immaginaria per gli altri, nel secondo caso è reale e uguale a zero per il

solo valore $\sigma_{01} = \sigma_{02} = \sigma_M$ e immaginaria per gli altri, nel terzo è sempre immaginaria. Noi, però, stabiliremo di considerare solo il valore assoluto del radicando, cosicchè l'impedenza risulterà sempre reale e alla pseudo-pulsazione σ_M potrà corrispondere anche un minimo. Le curve della impedenza circolare e di quella iperbolica presentano andamento analogo per valori del radicando $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} \gtrless 0$ e risultano, anzi, coincidenti per $R = \sqrt{2\frac{L}{C}}$; anche l'impedenza iperbolica presenta, infatti, in tal caso, un fenomeno di risonanza per $\sigma = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

È interessante notare che nei punti in cui l'impedenza iperbolica si annulla l'argomento γ risulta infinito e, quindi, il vettore $\overline{I}$ ha la direzione dell'assintoto; nei punti per i quali il radicando $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < 0$ l'argomento γ è immaginario e il vettore $\overline{I}$ si trova nel quadrante adiacente a quello della tensione.

5. — *Metodo simbolico composto.*

Si consideri una grandezza che sia prodotto di una funzione circolare e di una iperbolica del tempo. Per eseguire la rappresentazione simbolica si noti che, come nei due casi precedentemente visti di funzioni circolari e di funzioni iperboliche, si aveva rispettivamente:

$$\overline{B} = B_m(\cos\omega t + j \operatorname{sen}\omega t)$$
$$\overline{C} = C_m(Ch\,\sigma t + u\,Sh\,\sigma t)$$

così, nel caso presente, tenendo conto di tutti i termini rappresentanti il prodotto anzidetto, dovremo scrivere:

$$\overline{A} = A_m[Ch\sigma t \cos\omega t + j\,Ch\sigma t \operatorname{sen}\omega t + u\,Sh\sigma t \cos\omega t + uj\,Sh\sigma t \operatorname{sen}\omega t].$$

Ne segue:

$$\overline{A} = A_m[Ch\sigma t + u\,Sh\sigma t] \cdot [\cos\omega t + j \operatorname{sen}\omega t]$$

e, sotto forma esponenziale,

$$\overline{A} = A_m e^{(u\sigma + j\omega)t};$$

la grandezza considerata viene dunque rappresentata simbolicamente da un numero ipercomplesso con tre unità immaginarie, prodotto di un numero complesso e di uno pseudocomplesso.

Le unità u, j, uj e le espressioni del tipo:

$$\overline{N} = K_0 + uK_1 + jK_2 + ujK_3$$

(quest' ultima in generale non sarà riconducibile al prodotto di un numer complesso e di uno pseudocomplesso) costituiscono la base di un nuovo metodo simbolico, le cui regole di calcolo si fondano sulle condizioni:

$$u^2 = +1 \quad , \quad j^2 = -1 \quad , \quad (uj)^2 = -1.$$

In ogni numero ipercomplesso distingueremo un modulo *pseudocomplesso*, ottenuto considerando il numero stesso come complesso:

$$(2) \quad \text{Mod.} \{(K_0 + uK_1) + j(K_2 + uK_3)\} = \sqrt{(K_0 + uK_1)^2 + (K_2 + uK_3)^2}$$

con relativo argomento pseudocomplesso:

$$\varphi = \varphi_1 + u\varphi_2 = \text{arctg} \frac{K_2 + uK_3}{K_0 + uK_1};$$

un pseudomodulo complesso, ottenuto considerando il numero come pseudocomplesso,

$$(3) \quad \text{Mod.} \{(K_0 + jK_2) + u(K_1 + jK_3)\} = \sqrt{(K_0 + jK_2)^2 - (K_1 + jK_3)^2}$$

con relativo argomento complesso

$$\gamma = \gamma_1 + j\gamma_2 = \text{Sett } Th \frac{K_1 + jK_3}{K_0 + jK_2}$$

e, infine, un ipermodulo reale che è il modulo comune dei numeri (2) e (3) e vale:

$$R = \sqrt[4]{|(K_0^2 - K_1^2 - K_2^2 + K_3^2)^2 + 4(K_0K_2 - K_1K_3)^2|}.$$

In forma esponenziale si può scrivere corrispondentemente:

$$(K_0 + uK_1) + j(K_2 + uK_3) = (r_1 + ur_2)\, e^{j(\varphi_1 \pm u\varphi_2)}$$
$$(K_0 + jK_2) + u(K_1 + jK_3) = (\rho_1 + j\rho_2)\, e^{u(\gamma_1 \pm j\gamma_2)}$$

ed infine, essendo $\varphi_2 = \gamma_2$,

$$K_0 + uK_1 + jK_2 + ujK_3 = R\, e^{u\gamma_1 \pm j\varphi_1 \pm uj\varphi_2}.$$

Quando, come nell'esempio particolare da cui siamo partiti, il numero ipercomplesso è il prodotto di un numero complesso e di uno pseudocomplesso, gli argomenti φ e γ sono reali e coincidono con quelli dei fattori; si ha cioè:

$$\varphi_2 = \gamma_2 = 0 \quad , \quad \varphi_1 = \omega t \quad , \quad \gamma_1 = \sigma t$$

e il numero ipercomplesso si scrive in forma esponenziale:

$$\overline{V} = V_m e^{u\gamma + j\varphi}.$$

È interessante notare che con il metodo simbolico a tre unità possono essere trattati anche i fenomeni di modulazione circolare di grandezze circolari; infatti, quando la pseudopulsazione è immaginaria, si ha:

$$v = V_m \, Ch j\sigma t \cos \omega t = V_m \cos \sigma t \cos \omega t.$$

6. — *Applicazione con le grandezze composte.*

Al circuito elettrico considerato dianzi sia applicata la tensione [5]):

$$v = V_m \, Ch \sigma t \cos \omega t.$$

Si ha:

$$\overline{V} = V_m e^{(u\sigma + j\omega)t}$$

---

[5]) Nel caso in cui la σ sia immaginaria, cioè la tensione data sia della forma:

$$v = V_m \operatorname{cs} \Omega t \operatorname{cs} \omega t$$

si deduce, analogamente al testo e tenendo presente che $\dfrac{1}{j\omega + uj\Omega} = \dfrac{-j\omega + uj\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}$:

$$i = I_m \cdot \operatorname{cs}(\Omega t - \alpha) \cdot \operatorname{cs}(\omega t - \varphi)$$

$$\frac{V_m}{I_m} e^{j\varphi + uj\alpha} = R + j\omega \left[L - \frac{1}{C(\omega^2 - \Omega^2)} \right] + uj\Omega \left[L + \frac{1}{C(\omega^2 - \Omega^2)} \right] =$$

$$= R + jY + ujT.$$

Si ha dunque:

$$Z_{cc} = \frac{V_m}{I_m} = \sqrt[4]{\left| \left(R^2 - Y^2 - T^2 \right)^2 + 4R^2 Y^2 \right|}, \qquad \varphi + u\alpha = \operatorname{arctg} \frac{Y + uT}{R}$$

cioè

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2RY}{R^2 - Y^2 + T^2}, \qquad \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2RT}{R^2 + Y^2 - T^2}.$$

e l'equazione (1) del circuito presenta un integrale particolare della forma [6] :

$$i = I_m \, Ch\,(\sigma t - \gamma) \cdot \cos\,(\omega t - \varphi),$$

ossia

$$\overline{I} = I_m \, e^{u(\sigma t - \gamma) + j(\omega t - \varphi)} .$$

Per sostituzione si ricava dalla (1):

$$\frac{V_m}{I_m} e^{u\gamma + j\varphi} = R + u\sigma \left[L + \frac{1}{C(\sigma^2 + \omega^2)} \right] + j\omega \left[L - \frac{1}{C(\sigma^2 + \omega^2)} \right] =$$
$$= R + uX + jY = Z_{ic},$$

indicando con R, X, Y e Z_{ic} la resistenza, le reattanze iperbolica e circolare e l'impedenza del circuito alle correnti della forma precedente; è interessante notare che quest'ultima non si presenta come prodotto di un numero complesso per uno pseudocomplesso, perchè manca del termine in uj. Essa si può scrivere indifferentemente nelle due forme seguenti:

$$\overline{Z} = \sqrt{|(R + jY)^2 - X^2|} \cdot e^{u\gamma} = \sqrt[4]{|(R^2 - X^2 - Y^2)^2 + 4R^2Y^2|} \cdot e^{u\gamma + j\varphi}$$

con

$$\gamma = \text{Sett } Tgh \frac{X}{R + jY}, \qquad \varphi' = \frac{1}{2} \text{ arctg } \frac{2RY}{R^2 - X^2 - Y^2}$$

oppure

$$\overline{Z} = \sqrt{|(R + uX)^2 + Y^2|} \cdot e^{j\varphi'} = \sqrt[4]{|(R^2 + X^2 + Y^2)^2 - 4R^2X^2|} \cdot e^{u\gamma' + j\varphi'}$$

con

$$\gamma' = \frac{1}{2} \text{ Sett } Tgh \frac{2RX}{R^2 + X^2 + Y^2}, \qquad \varphi' = \text{arctg } \frac{Y}{R + uX}.$$

Si ha:

$$(R^2 - X^2 - Y^2)^2 + 4R^2Y^2 = (R^2 + X^2 + Y^2)^2 - 4R^2X^2$$
$$u\gamma + j\varphi = u\gamma' + j\varphi'.$$

---

[6]) Per integrare la (1) nel caso presente è conveniente porre $i = \frac{dq}{dt}$ ed esprimere le funzioni circolari ed iperboliche mediante esponenziali.

L'ipermodulo dell'impedenza è una funzione reale positiva delle variabili σ e ω, la quale per $\sigma = 0$ od $\omega = 0$ coincide rispettivamente con le funzioni rappresentanti l'impedenza circolare e quella iperbolica. L'esame analitico si presenta alquanto complicato; per l'esame grafico conviene procedere come segue.

Si ponga

$$\sigma' = \sigma \sqrt{LC} \quad , \quad \omega' = \omega \sqrt{LC}$$

che chiameremo pseudopulsazione e pulsazione ridotte; si ha allora:

$$X = \left(\sigma' + \frac{\sigma'}{\sigma'^2 + \omega'^2}\right) \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = X' \cdot \sqrt{\frac{L}{C}};$$

$$Y = \left(\sigma' - \frac{\sigma'}{\sigma'^2 + \omega'^2}\right) \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = Y' \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Se si pone ancora:

$$R = R' \sqrt{\frac{L}{C}},$$

si ha:

$$Z_{ic} = \sqrt[2]{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt[4]{|(R'^2 - X'^2 - Y'^2)^2 + 4 R'^2 Y'^2|} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot Z'_{ic}.$$

Possiamo denominare le grandezze adimensionali R', X', Y' e Z'_{ic} rispettivamente resistenza, reattanza iperbolica, reattanza circolare e impedenza composta ridotte. L'espressione Z'_{ic} è indipendente dai valori di L e C, cosicchè la sua rappresentazione grafica fornisce una serie di abachi molto utili per il calcolo del valore dell'impedenza composta (e, in particolare, dell'impedenza semplice, circolare o iperbolica) relativo ad una terna generica L, C, R. Dall'esame di tali curve si deduce che l'andamento dell'impedenza composta in funzione di ognuna delle variabili separatamente si presenta in taluni casi molto diverso da quello dell'impedenza circolare od iperbolica già viste; i punti singolari relativi a queste ultime (minimi, massimi, cuspidi) risultano spostati o anche modificati.

7. — *Conclusione.*

Si è esaminato il comportamento a regime di un circuito elettrico ad elementi R, L, C costanti, alimentato in serie da tensioni di natura iperbolica od iperbolico-circolare. Per la trattazione di tali fenomeni si sono stabiliti metodi simbolici mediante i quali si giunge alla formulazione di una legge analoga a quella di Ohm e valida per circuiti in cui agiscono rispettivamente f. e. m. iperboliche o iperbolico-circolari. Risultano pure applicabili le due leggi di Kirchhoff e, in generale con opportune e semplici modifiche, la massima parte delle norme ed artifici usati per i circuiti a corrente continua.

L' uso di tali metodi simbolici permette, dunque, di risolvere in maniera semplice, rigorosa ed uniforme i problemi, di notevole interesse per la teoria e per la pratica, connessi con grandezze iperboliche ed iperbolico-circolari. Mostreremo in seguito come, sviluppando i concetti esposti, si giunga alla formulazione di un metodo simbolico generale valevole per la trattazione nei circuiti lineari non solo dei fenomeni di regime stabilito corrispondenti a qualsiasi tipo di corrente, ma anche dei fenomeni di regime variabile.

Di Niccolò Braucci da Caivano (1719-1774) e della sua opera inedita dal titolo: Istoria naturale della Campania sotterranea.

Memoria del socio ordinario **Geremia D'Erasmo**

(presentata nell' adunanza del dì 9 novembre 1940 - XIX
per essere inserita nel vol. II, serie 3ª, degli Atti

Sunto. — Al fine di contribuire alla storia dei progressi della geologia nel mezzogiorno d'Italia, e sopratutto nella zona vesuviana e flegrea, l'A. dà, in questo lavoro, una diffusa ed ordinata illustrazione di una memoria, inedita e pressochè ignorata, di Niccolò Braucci da Caivano, che nella seconda metà del secolo XVIII occupò interinalmente per sei anni la cattedra di Storia naturale nell'Università di Napoli e che, pur essendo stato sopratutto un medico ed avendo prediletto l'insegnamento della botanica, anche nel campo geologico ebbe spesso idee esatte e con occhio limpido seppe scrutare, malgrado le sciocche credenze proprie del tempo in cui visse, le forme e le vicende di questo meraviglioso lembo di terra campana plasmato dai fuochi ipogei.

Dopo aver fornito brevi notizie sulla vita e sulle opere del Braucci, l'A. tratta dello stato e delle vicende del manoscritto (attualmente conservato nella Biblioteca Nazionale Vittorio Emanuele III di Napoli), stabilendone, in base a varie osservazioni, la data di stesura (1773). Passa quindi all'esame particolareggiato delle singole parti dell'opera, che è suddivisa in tre sezioni, la prima delle quali tratta « delle materie naturali della Campania », cioè di quelle rocce, che il Braucci considerava formate indipendentemente dall'azione dei vulcani; la seconda si occupa « dei luoghi e delle materie bruciate della Campania », cioè descrive le diverse bocche vulcaniche riconosciute nei Campi e nelle isole Flegree e nelle altre località campane, ed esamina i vari prodotti dell'attività ignivoma; e la terza enumera infine i principali periodi eruttivi della regione, trattando « delle portentose piogge di pietre cadute anticamente nella Campania per causa degli eccessivi incendi del Vesuvio e degli altri suoi vulcani ». Preceduta da una Introduzione, nella quale il Braucci cerca di spiegare la varia origine delle rocce, il modo con cui esse si accrescono nelle diverse regioni del globo, e i mutamenti verificatisi nei rapporti tra i continenti e le acque, la memoria esaminata si chiude con una specie di Appendice, dedicata alla elencazione di numerose piogge di pietre e di corpi eterogenei, avvenute in Campania e nel Lazio secondo le descrizioni di antichi scrittori, con lo scopo di dimostrarne l'origine prevalentemente vulcanica.

Nell'esame di tutte queste diverse parti dell'opera viene seguito ordinatamente il testo capitolo per capitolo, in modo che il lettore possa formarsi una chiara idea della distribuzione della materia trattata e delle vedute dell'autore in riguardo ai diversi fatti e fenomeni naturali, che furono oggetto di esame. In particolare rilievo vengono messi quei brani (riportati per lo più nel loro testo integrale), che rappresentano un progresso di cognizioni geologiche rispetto all'epoca nella quale furono scritti, e rivelano nel Braucci buone doti di preparazione letteraria e storica, di coscienziosa osservazione e di chiara esposizione.

In un capitolo conclusivo si tratta, infine, dello stato delle cognizioni sulla vulcanologia della Campania nella seconda metà del secolo XVIII, passando in rapida rassegna i risultati ottenuti, in questo campo di ricerche, dai principali studiosi (Niccolò Braucci, William Hamilton, Richard de Saint Non, Niccolò Carletti, Wolfango Goethe, Lazzaro Spallanzani, Scipione Breislak), che si occuparono della regione, per meglio precisarne i meriti relativi nella storia dei progressi della geologia campana sul finire del Settecento.

Eusicyonia carinata (Olivi): apparecchi digerente, branchiale e sessuale; anatomia, fisiologia, sviluppo ed anomalie in rapporto cogli altri Crostacei Decapodi.

Memoria del prof. **Arturo Palombi,** *presentata dal socio* **U. Pierantoni**

(presentata nell' adunanza del dì 9 novembre 1940 - XIX
per essere inserita nel vol. II, serie 3ª, degli Atti)

Sunto. — Vengono studiati, sotto il punto di vista morfologico, istologico e fisiologico, gli apparecchi digerente, branchiale e sessuale del Peneide *Eusicyonia carinata* (Olivi).

Dell' apparecchio digerente sono illustrate le appendici boccali, nonchè le varie parti del tubo enterico: esofago, colle glandole annesse; stomaco, nella sua porzione gastrica e pilorica, descrivendo, della prima, l' armatura triturante, e della seconda, l' ampolla pilorica. Di ambedue, inoltre, è illustrata la muscolatura tanto estrinseca che intrinseca. Dell' organo enterico (epatopancreas) è studiata la morfologia ed esaminata la complessa sua attività che nel tempo gli è stata gradatamente assegnata. È infine descritto l' intestino nelle sue parti media e terminale.

Dell' apparecchio branchiale, sono illustrati gli organi destinati alla funzione respiratoria: branchie, epipoditi, scafognatite, investigandone il loro significato funzionale e definendo la formola branchiale non solo di *Eusicyonia carinata*, ma anche di altri Peneidi.

Dell' apparecchio sessuale, sono studiati tanto gli organi interni che esterni. Degli apparecchi genitali (petasma e synandricum), vengono inoltre illustrati interamente lo sviluppo ed il loro significato funzionale. È descritto l' accoppiamento e ne è investigato il meccanismo anche in relazione cogli altri Crostacei Decapodi. È altresì illustrata l' azione delle glandole della fluidificazione in rapporto alla fecondazione delle uova ed alla deposizione di queste di cui sono descritte le fasi principali. È descritta infine un' interessante anomalia sessuale con synandricum soprannumerari e sono passate in rassegna ed ordinate le varie aberrazioni degli organi sessuali rinvenute nei Crostacei Decapodi.

Contributo alla conoscenza di alcuni materiali silicei nazionali

Nota di **Giuseppe Zaffuto** *e di* **Antonio Giannone**,
presentata dal socio **G. Malquori**

(Adunanza del dì 7 dicembre 1940 - XIX)

Sunto. — Gli Autori descrivono le caratteristiche strutturali, chimiche e tecniche di alcuni materiali silicei nazionali destinati all'industria dei refrattari.

Le rocce silicee da destinarsi alla produzione dei refrattari omonimi debbono essere vagliate attraverso le opportune indagini di laboratorio che forniscono al tecnico delle indicazioni di notevole valore ai fini del loro impiego [1]). Si è ritenuto pertanto utile di impostare l'esame — sotto più di un aspetto, ma sempre in vista delle suaccennate applicazioni — di alcuni materiali silicei nazionali, dei quali riportiamo, nel corso della Nota, le caratteristiche essenziali di giacitura, di tessitura, microstruttura, composizione chimica. Si è esaminata inoltre la loro attitudine alla conversione (del β quarzo nelle forme a più basso peso specifico: cristobalite, tridimite) a mezzo dello studio del comportamento termo-dilatometrico di provini preventivamente sottoposti a trattamento termico per tempi e per temperature stabiliti.

Oltre a quarzi e a quarziti tipiche, abbiamo preso in esame un altro materiale che si presenta interessante ai fini delle applicazioni nell'industria dei refrattari: intendiamo la selce più o meno diasprigna e calcedoniosa che è conosciuta in vari livelli del mesozoico, e specialmente fra i calcari stratificati del lias medio, nelle formazioni giurassiche, nel calcare grigio chiaro del cretacico inferiore, e, subordinatamente, nel calcare rosato del cretacico superiore.

Riteniamo che questi giacimenti silexitici, i quali, pur con differente densità, appaiono abbondantemente diffusi in varie regioni del nostro territorio, meritino particolare attenzione per la relativa facilità con cui si può conseguire la stabilizzazione termica del materiale.

1) *Quarzo, in ciottoli, di Porto Torres (Sardegna)*

Il materiale, costituito da una ghiaia silicea di notevole purezza, profondamente rimaneggiata dalle onde marine, proviene dalle antiche forma-

---

[1]) Malquori G. e Giannone A., *L'esame delle materie prime da destinarsi alla produzione di refrattari silicei*. Rend. R. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, 1939.

zioni del bacino imbrifero, donde venne asportato dalle acque continentali e dall'azione erosiva delle acque marine. Appartiene a quella zona compresa fra Sassari e Porto Torres che, per quanto geologicamente complessa, è tuttavia, sotto tale aspetto, ben conosciuta.

I ciottoli quarzosi appaiono originariamente in relazione con le formazioni metamorfiche quarzo-filladiche che verso l'Argentiera e nella vicina isola dell'Asinara assumono una facies litologica prevalentemente quarzo-filoniana e micacea.

Malgrado l'elevato tenore di SiO_2, le buone caratteristiche pirometriche (Vedi Tab. I) di questo materiale, la tessitura (fig. 1) che esso presenta (che si accompagna ad una notevole purezza e alla completa assenza di cemento basale) ne abbassa sensibilmente la velocità di trasformazione rispetto alle « findlingsquartzite » tedesche ricche di cemento basale (figg. 2 e 5).

TABELLA I

	Quarzo di Porto Torres					Findlingsquartzite di: Honnef *		Borchen *	
	1	2	3	4	5 lavato	1	2	1	2
P. a. f.	1,40	1,40	0,70	1,42	0,15	0,30	0,32	0,36	0,46
SiO_2	96,20	95,60	97,70	94,71	99,46	96,68	96,48	97,16	96,76
Al_2O_3	0,67	0,80	0,82	3,26	0,80	0,80	0,70	0,80	0,90
Fe_2O_3	0,80	0,80	0,08			0,59	0,80	0,50	0,40
TiO_2	—	—	—	—	—	0.90	0.90	0.70	0.75
CaO	1,05	1,10	0,50	0,32	tr.	0,20	0,14	0,48	0,56
MgO	0,20	tr.	tr.	tr.	tr.	—	—	—	—
Refr. C. S.	33					33 ÷ 34		33 ÷ 34	

L'influenza della tessitura sulla velocità di trasformazione risulta evidente dalle curve termo-dilatometriche (figg. 3 e 4).

Queste e le altre curve termo-dilatometriche di cui riportiamo nel corso della Nota la documentazione originale, sono state ottenute a mezzo del dilatometro differenziale CHEVENARD, a registrazione fotografica, lavorando su provini scaldati per 9 ore a 1350°.

Sulle curve di cui sopra sono visibili le notevoli dilatazioni che accompagnano le trasformazioni: $\beta \rightleftarrows \alpha$ cristabolite ($\sim 230°$), $\beta \rightleftarrows \alpha$ quarzo (575°) e che pertanto rivelano la presenza di tali costituenti nel materiale che ha subito il trattamento termico.

Il confronto fra l'andamento della curva dilatometrica di una quarzite a cemento basale (fig. 4), e quello presentato dal quarzo di Porto Torres

* Westerwald.

(fig. 3) lascia distinguere come lo stesso trattamento termico ha agito sui due materiali. Mentre cioè, per il Porto Torres esiste ancora una notevole aliquota di quarzo non trasformato, esso è scomparso quasi del tutto per la quarzite a cemento basale.

2) *Quarzo di Bibiana, presso Pinerolo (Piemonte)*

Si rinviene nelle formazioni alluvionali del territorio di questo comune, ove estese appaiono anche le formazioni cristalline costituite quasi esclusivamente da gneiss e micascisti propriamente detti.

Lo studio dell'alluvione recente di Bibiana ha lasciato rilevare la predominanza del quarzo, sia nelle sabbie (ove raggiunge talvolta anche il 90 %), sia nei ciottoli commisti ad altre rocce (gneiss, serpentini, scisti cloritici, prasiniti ecc.). Concentrazioni quarzose si rinvengono anche tra i ciottoli provenienti dalle rocce della Valle del Pellice.

La tessitura del materiale (fig. 7) è olocristallina, priva di cemento basale, con grani ben sviluppati di forma alquanto irregolare, di dimensioni notevolmente più piccole che non nel precedente caso, e con estinzione distintamente ondulata.

L'analisi chimica e la prova di refrattarietà hanno fornito i seguenti valori:

P. a. f.	SiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	TiO_2	CaO	C. S.
0,60	95,90	0,43	0,87	—	0,32	33

Malgrado la composizione e le proprietà pirometriche, la trasformabilità appare scarsa, come si rileva in modo evidente dalla curva termo-dilatometrica (fig. 6).

3) *Quarziti di Monzone (Alpi Apuane)*

Tra le formazioni scistose triassiche e paleozoiche delle Alpi Apuane si rinviene non raramente il quarzo in vene o anche in filoni d'importanza industriale.

Già nel 1890, infatti, la Società «Silici e Quarzi d'Italia» coltivava per la produzione di materiali refrattari e di vetro per ottica, il filone di quarzo jalino, avente fino a m. 4 di spessore, delle Capannelle (Massa), inserito negli scisti sericitici del trias superiore.

In Valle Vinai e specie lungo il torrente Lucido, ad un livello più basso del precedente, e precisamente tra i calcari listati del raibliano, si rinviene una quarzite alquanto impura per feldspati che già nello scorso secolo veniva estratta nelle vicinanze di Ajola e di Monzone ed avviata, per la fabbricazione di ceramiche, alla Manifattura di Doccia.

Composizione chimica e refrattarietà:

P. a. f.	SiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	TiO_2	CaO	C. S.
0,20	97,44	0,42	0,68	—	0,88	33

All'esame microscopico la tessitura appare olocristallina (figg. 8 e 9), con grani a mutuo contatto, di dimensioni pressochè uniformi e notevolmente inferiori a quelle osservate nei precedenti casi, a contorno abbastanza regolare, con forme prevalentemente rotondeggianti e scarse inclusioni.

4) *Selce di Villa d'Almè (Bergamo)*

Nella regione la selce si ritrova in parecchi livelli stratigrafici: tra i calcari bianchi compatti (maiolica) dell'infracretacico e giurassico sup.; tra quelli marnosi chiari, intercalati a calcari scuri e a marne verdognole del lias superiore; nei calcari del domeriano e del trias medio; ma dove appare particolarmente abbondante è in quelli marnosi, di colore rosso vino, ricchi di scisti diaspigni, del giurassico.

L'analisi chimica e le prove pirometriche effettuate su tre campioni hanno fornito i seguenti risultati:

	I	II	III
P. a. f.	0,78	0,28	0,96
SiO_2	97,48	96,68	96,82
Al_2O_3	0,38	0,40	0,20
TiO_2	—	—	—
Fe_2O_3	0,72	1,40	0,59
CaO	0,47	0,49	0,24
C. S.	33	33	33

Si notino rispetto ai precedenti campioni le profonde variazioni di tessitura (fig. 10) e microstrutturale (v. röntgenogrammi figg. 11, 12, 13), nonchè la buona trasformabilità del materiale.

5) *Scisti silicei di Lagonegro (Lucania)*

I caratteri geo-litologici e le condizioni montanistiche di questo materiale sono state ampiamente illustrate in uno studio del sen. De Lorenzo, studio nel quale vengono riconosciuti e delimitati gli scisti silicei e diaspigni (compresi fra i calcari e le dolomie neo-triassiche), che appaiono notevolmente estesi intorno a Lagonegro, specie nel gruppo che culmina nel M. Sirino e nel M. Papa.

Gli scisti a radiolari, intimamente legati ai calcari selciferi, sono generalmente rappresentati da una roccia silicea o quarzosa, criptocristallina, sovente impura, di varia colorazione, che nei punti più tormentati passa a vera quarzite bianca e cristallina. Associati agli scisti appaiono i diaspri e straterelli di selce cornea criptocristallina passante a calcedonio, piromaca.

Ai saggi di laboratorio, il materiale, la cui tessitura è illustrata nella microfotografia della fig. 15, e che, alle prove di cottura, appare facilmente trasformabile (fig. 14), ha fornito i seguenti risultati:

	I	II
P. a. f.	0,50	0,16
SiO_2	96,40	98,88
Al_2O_3	1,00	0,20
Fe_2O_3	1,60	0,36
TiO_2	—	0,08
CaO	0,15	0,30
MgO	ter.	—
C. S.	34	33

6) *Selce dei Monti Martani (Terni)*

La si riscontra, più o meno diasprigna e calcedoniosa, in noduli, lenti, straterelli, tra i calcari dei vari livelli del mesozoico, specie del lias medio, del giurassico e del neocomiano, o anche, più o meno commista a frammenti di calcare, nell'ampio detrito di falda che occupa specialmente il versante occidentale dei Monti Martani.

Riportiamo qui di seguito alcune analisi e punti di fusione rilevati sui vari campioni esaminati:

	N. 1	N. 2		N. 3	N. 4	N. 5
	scistosa rossastra	porosa, bianco rossastra		grigiastra compatta	grigiastra compatta	compatta ceroide
		(a)	(b)			
P. a. f.	1,49	2,50	4,34	1,05	1,10	1,08
SiO_2	95,90	93,50	89,90	98,20	97,70	97,40
Fe_2O_3 Al_2O_3	2,40	0,80	1,00	0,80	1,20	1,30
TiO_2	tr.	tr.	tr.	tr.	tr.	tr.
CaO	tr.	2,38	4,70	tr.	tr.	tr.
MgO	tr.	tr.	tr.	ass.	ass.	ass.
C. S.	32	32 ÷ 33		33	33	33

Il materiale appare facilmente trasformabile, come lascia presumere l'esame della sua tessitura (fig. 16) e come conferma la curva termo-dilatometrica.

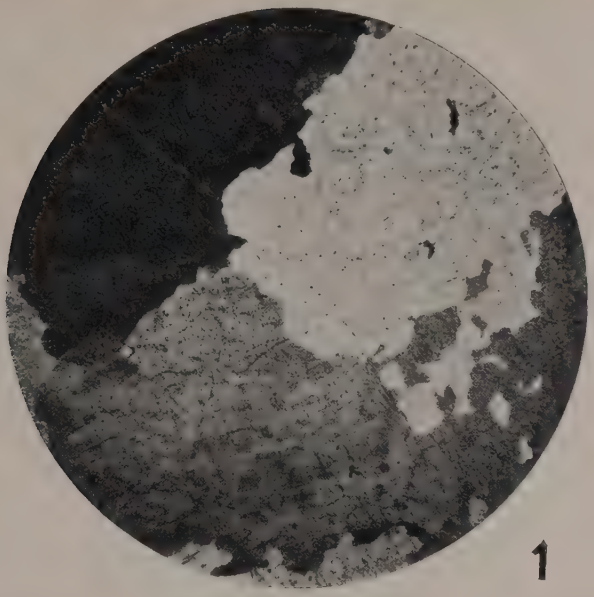
7) *Silice di Magomadas (Sardegna)*

Tale silice, depositata da acque silicifere sgorganti da rocce eruttive oligoceniche, e sovrapposta a rocce trachitiche e sedimenti miocenici, appare di notevole purezza, come può rilevarsi dalle analisi qui appresso riportate:

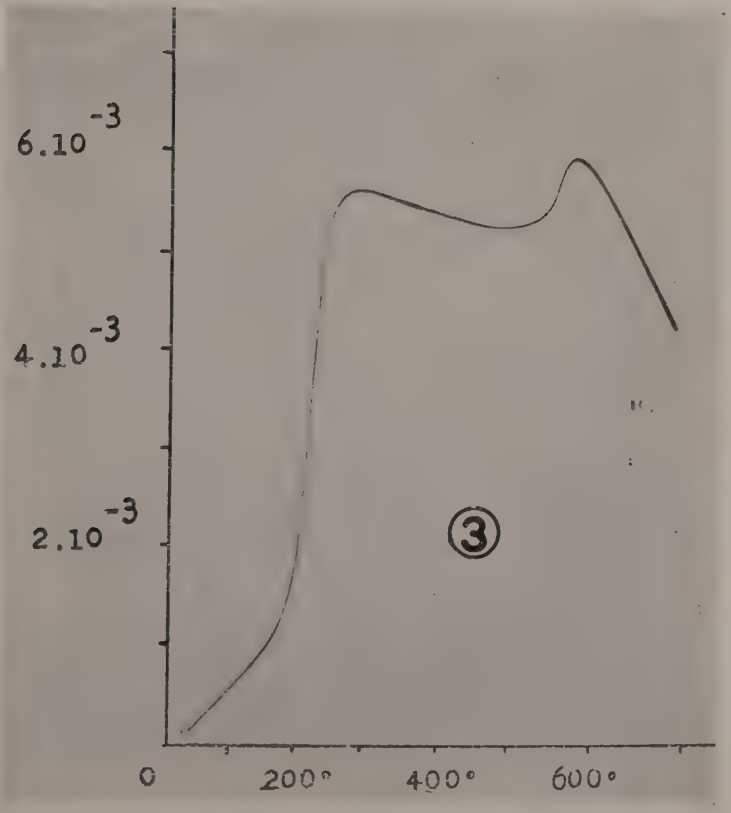
	1	2	3
P. a. f.	0,96	1,40	1,30
SiO_2	97,40	97,06	97,18
Al_2O_3	0,61	0,59	0,61
Fe_2O_3	0,39	0,39	0,39
CaO	0,20	0,14	0,28
MgO	—	—	—
C. S.	33 ÷ 34	33 ÷ 34	33 ÷ 34

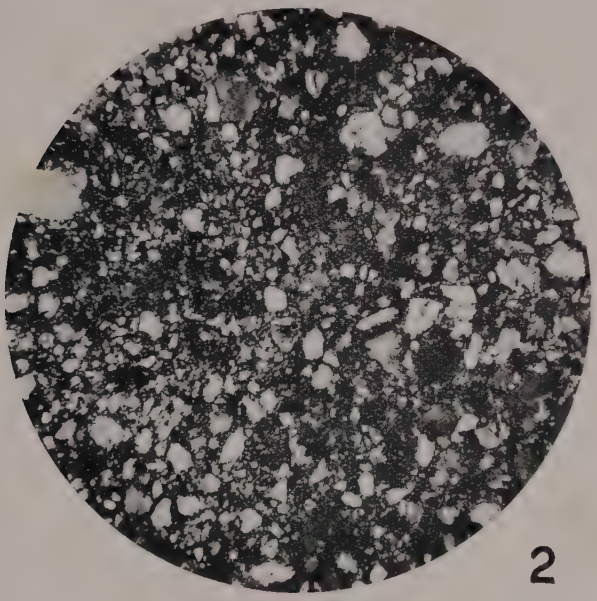
L'elevato tenore di SiO_2 che, su materiale scelto, può salire fino a 98,80%, le caratteristiche pirometriche e la facile trasformabilità (v. fig. 19), accompagnantesi ad una tessitura molto fine (figg. 17 e 18) che assume sovente aspetti tipicamente calcedoniosi, conferiscono particolare interesse a questo tipo di materiale.

Le indagini di cui abbiamo dato conto succintamente, dirette dal prof. Malquori e impostate su criteri analoghi, vengono estendendosi ad altri materiali similari di differenti provenienze.

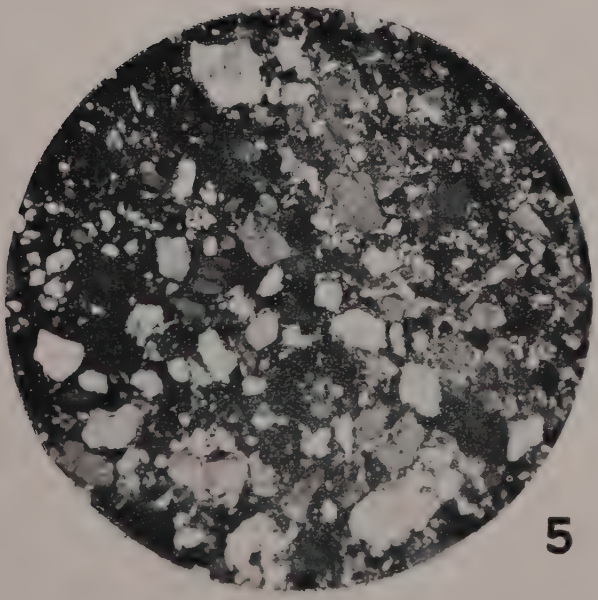


1

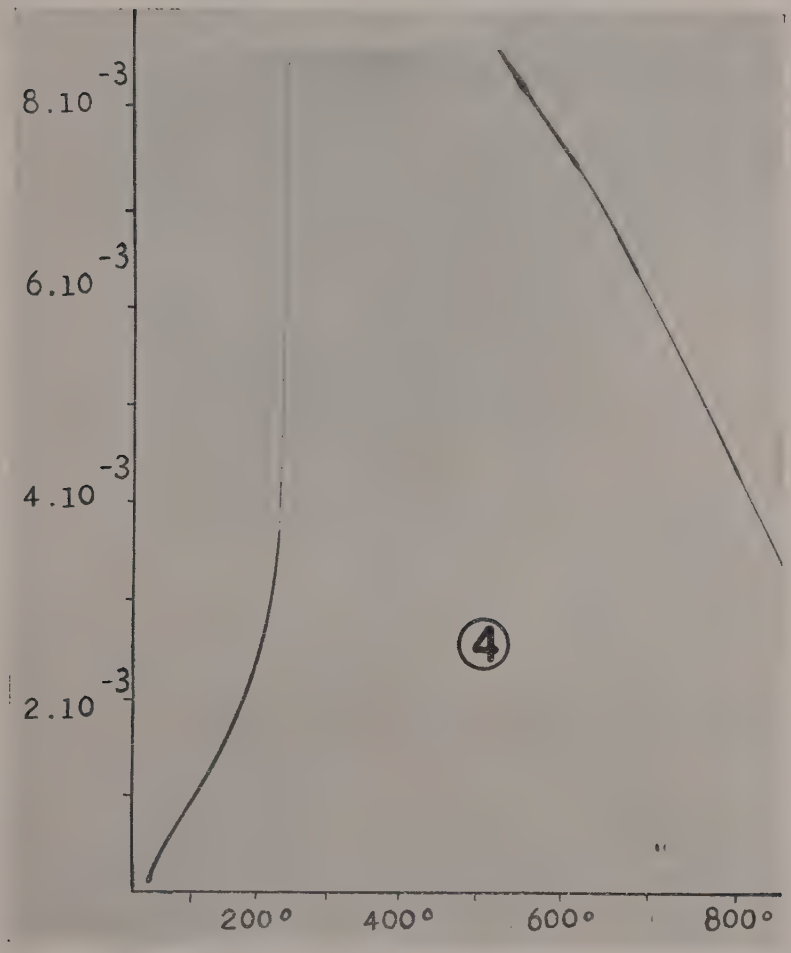


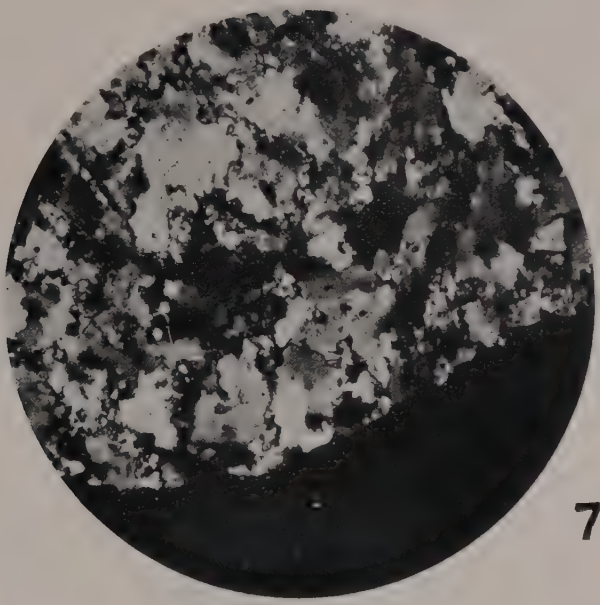


2

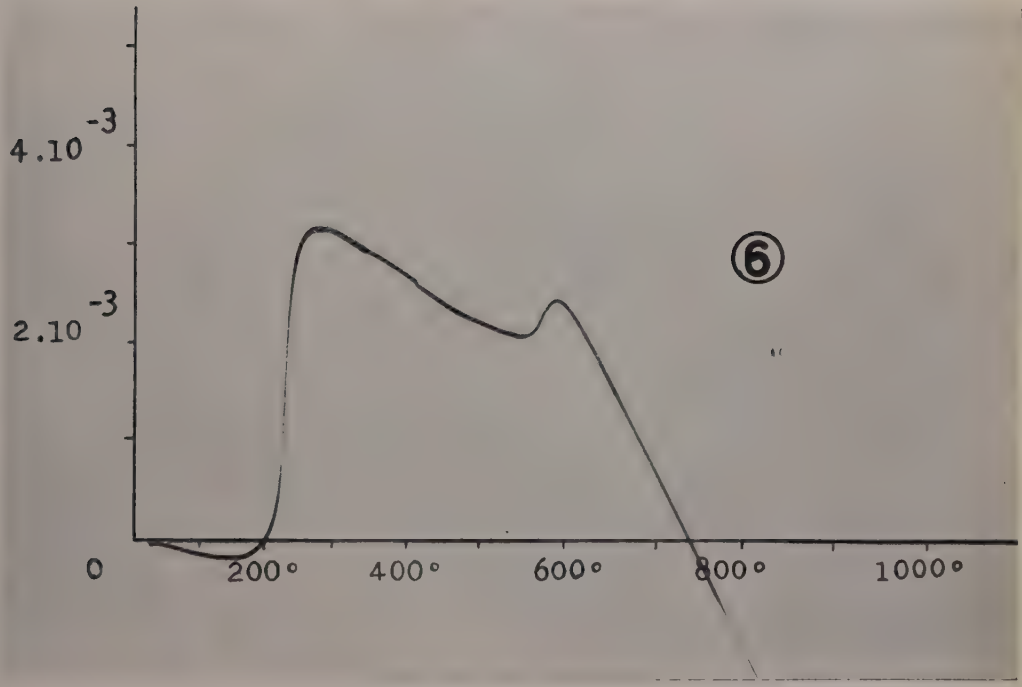


5

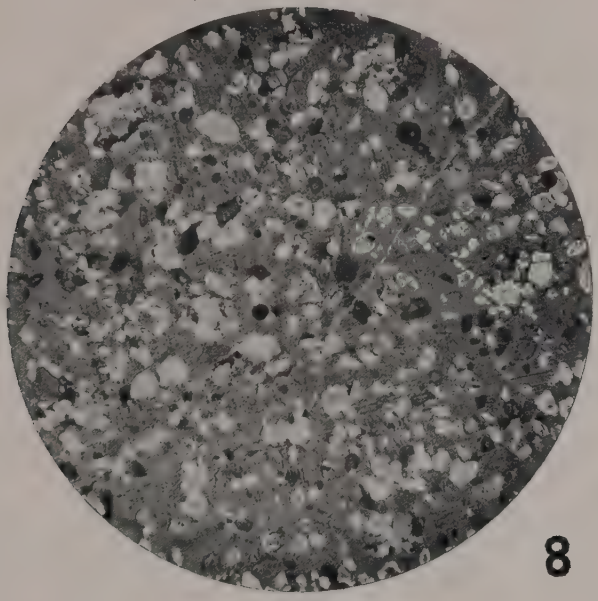

8.10 -3
6.10 -3
4.10 -3
2.10 -3
4
200°
400°
600°
800°



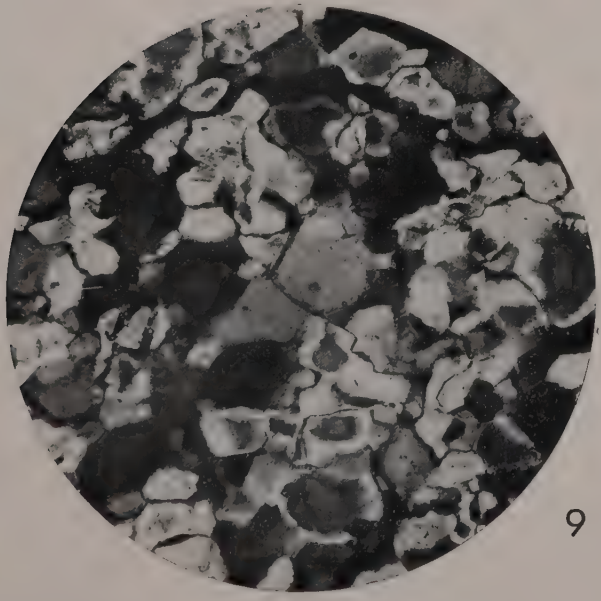
7



⑥



8



9

Indagini sulle terre refrattarie di Fiano Romano

Nota del dott. **Vittorio Cirilli**, *presentata dal socio* **G. Malquori**

(Adunanza del dì 7 dicembre 1940 - XIX)

Sunto. — Campioni di terre refrattarie prelevati dalle cave di Fiano Romano, sono stati sottoposti ad indagini chimiche, termiche e röntgenografiche. Essi risultano prevalentemente costituiti da halloysite e da alunite.

La cava dei materiali che sono oggetto della presente ricerca, è situata a circa 2 km. a valle dell'abitato di Fiano Romano, e dista dalla via Tiberina di circa 1 km.

Da notizie contenute in una succinta descrizione che del giacimento fece il prof. Meli [1]), si apprende che le escavazioni furono iniziate diversi anni addietro; ogni attività venne però sospesa alla fine della guerra mondiale e solo recentemente le cave sono state poste di nuovo in esercizio per opera della Soc. An. Cave e Concessioni.

Il prof. Malquori, avendo avuto occasione di visitare gli scavi in atto ed i lavori di prospezione che si vengono espletando, ha osservato che lo scavo allo scoperto presenta un materiale molto eterogeneo, a stratificazioni tormentate di prodotti che solo ad una osservazione sommaria appariscono simili mentre un loro esame più accurato rivela marcate diversità per la tessitura, la consistenza, la plasticità.

I campioni prelevati durante il sopraluogo alla cava, sono stati da me studiati onde identificarne la natura, e quì di seguito dò conto dei risultati delle indagini svolte.

Si tratta di materiali di aspetto vario sia come consistenza sia come colore; alcuni campioni sono compatti, mentre altri, molto leggeri, si sgretolano con facilità.

Riporto nella Tab. I le loro analisi, che ho eseguito su prodotto preventivamente seccato all'aria.

---

[1]) *Nota preliminare intorno ad una cava di materiali argillosi refrattari, che sta attivandosi nei dintorni di Roma.* Boll. Soc. Geol. Ital., v. 35, p. 317 (1916).

Tabella I

	1 bianco	2 giallo	3 bianco	4 grigio	5 bianco (leggero)
Perdita al fuoco	25,84	25,03	21,96	22,62	38,28
SiO_2	39,06	36,20	38,05	27,05	12,90
$Al_2O_3 + TiO_2$	34,65	32,69	36,29	36,40	34,43
Fe_2O_3	tr.	2,60	tr.	5,34	tr.
CaO	tr.	0,36	0,36	0,60	0,52
MgO	tr.	tr.	0,20	0,34	0,30
$K_2O + Na_2O$	0,26	1,64	1,69	3,98	6,95
SO_3	0,98	5,57	5,85	14,10	24,84
Perdita a 120°	12,2	9,3	2,9	3,4	1,2

Gli spettri Debye e le curve: perdita di peso-temperatura sono riportati nelle fig. 1 e 2 insieme con quelli di un campione di alunite pura.

Per i campioni N.ⁱ 2, 3, 4, 5 la presenza di alunite risulta evidente.

Dibattuti a lungo con acqua impartiscono ad essa la reazione dei solfati; nel liquido ho altresì rilevato la presenza di $Al^{\cdots}$. È lecito pertanto di ritenere probabile la presenza di piccole quantità di allumogeno, non identificabili però sia con l'analisi röntgenografica sia con l'analisi termo-ponderale.

Accanto all'alunite è presente un costituente siallitico sulla cui natura un primo indizio lo si ha dall'osservazione che i vari prodotti di cui è riportata l'analisi nella Tabella I, fatte le correzioni inerenti al contenuto di alunite, mostrano un rapporto SiO_2/Al_2O_3 all'incirca uguale a 2. Due di essi però, i campioni N.ⁱ 1 e 2 accusano un'elevata perdita di peso a 120°, fatto questo che porterebbe ad escludere la caolinite.

Immergendo il materiale N. 2 in un liquido ad indice di rifrazione uguale a 1,54, ho osservato che accanto ad una quantità relativamente piccola di sostanza con indice di rifrazione nettamente superiore, la più gran parte del materiale ha un indice di rifrazione nettamente inferiore.

Ciò unito agli indizi di cui sopra, lascia adito all'ipotesi che si abbia a che fare con l'halloysite. È noto infatti [1]) che la caolinite, la metahalloysite, la sericite, hanno un indice di rifrazione superiore a 1,54 mentre sono inferiori quelli dell'halloysite e della montmorillonite.

[1]) Noll W., *Neuere Methoden zur Mineralanalyse von Tonen*. Ber. Deutsch. Ker. Ges. v. 20, p. 180 (1939).

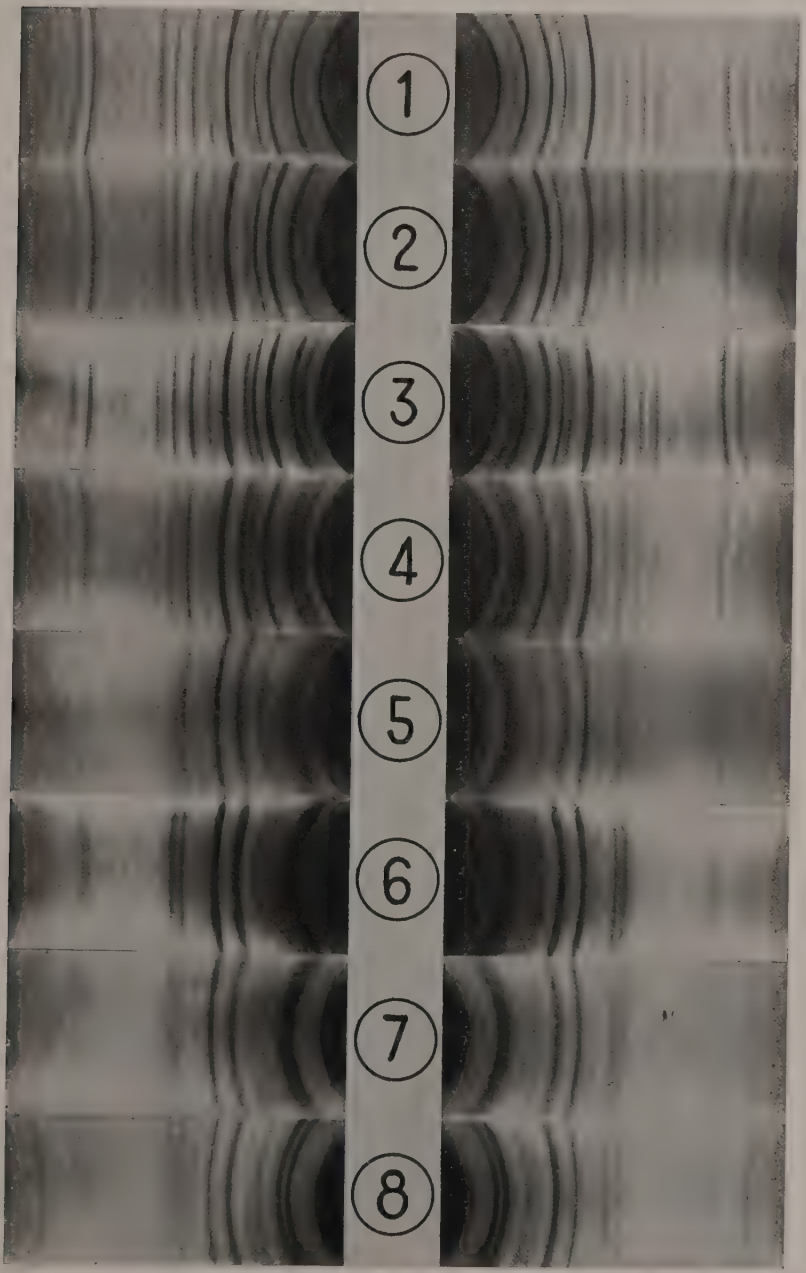
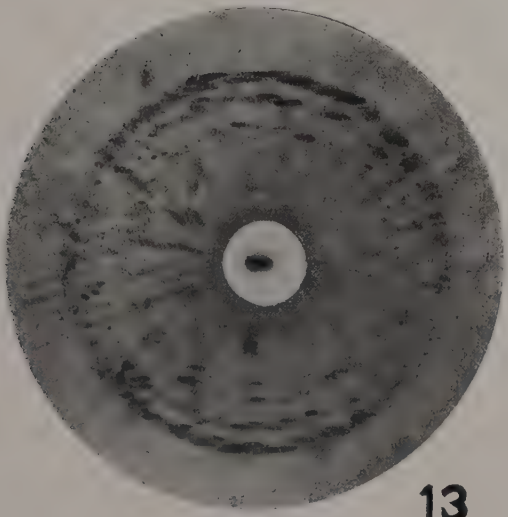


Fig. 1.

1) Alunite ; 2) Mat. N. 5 ; 3) Mat. N. 4
4) Mat. N. 3 ; 5) Mat. N. 2 ; 6) Mat. N. 1
7) Metahalloysite ; 8) Caolino

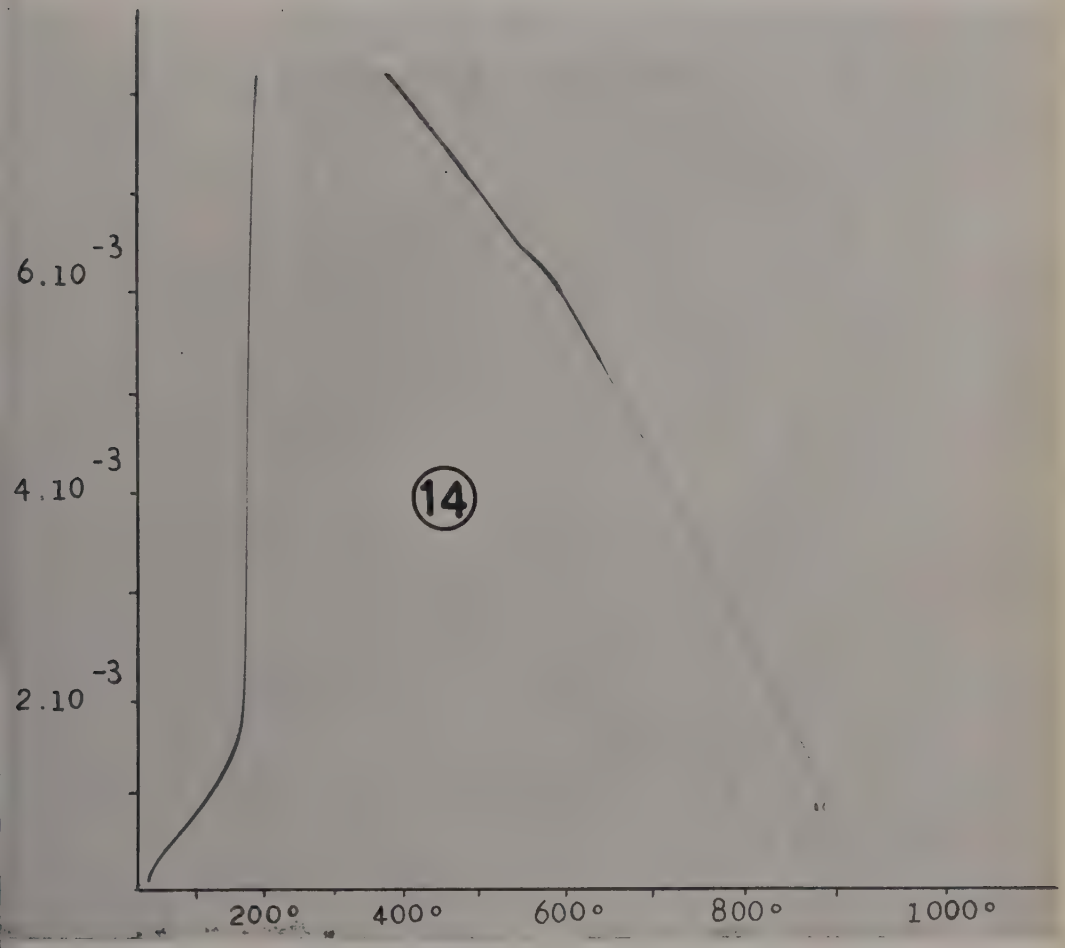
12

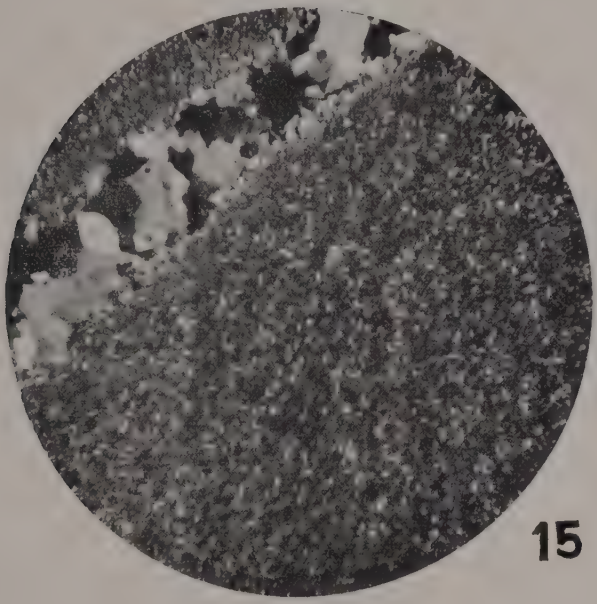
Quarzite di Monzone.



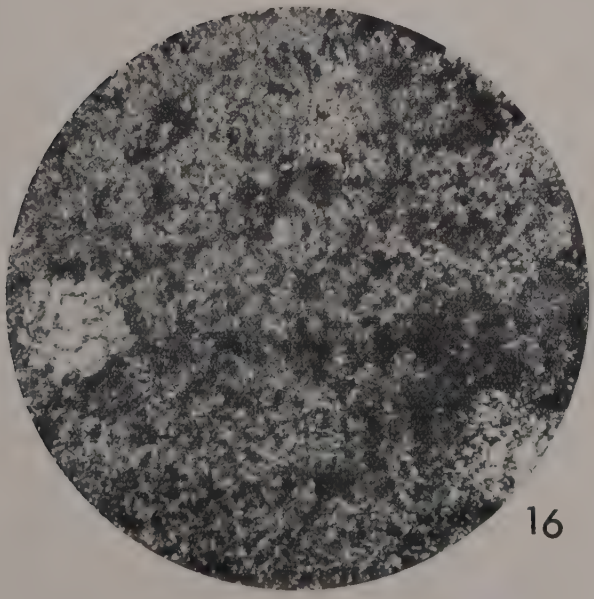
13

Quarzo di Bibiana.


6.10 -3
4.10 -3
2.10 -3
14
200°
400°
600°
800°
1000°

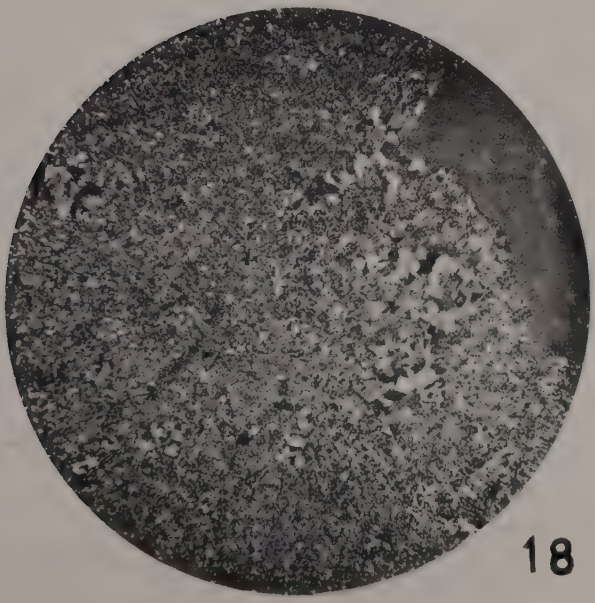


15

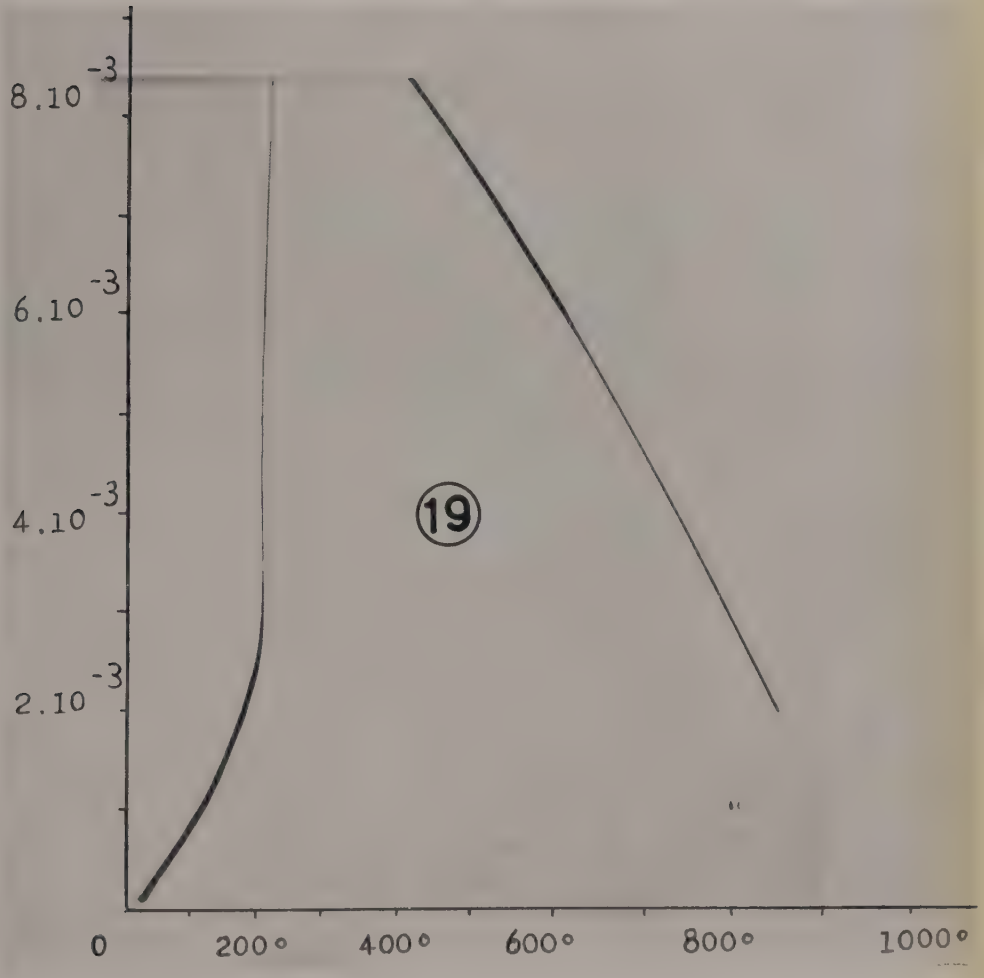


16

17



18


8.10 -3
6.10 -3
4.10 -3
2.10 -3
19
0
200°
400°
600°
800°
1000°

I granelli ad indice di rifrazione maggiore di 1,54 mostrano un valore dell'indice compreso tra 1,57 e 1,60 e sono pertanto da ritenersi dei granelli di alunite.

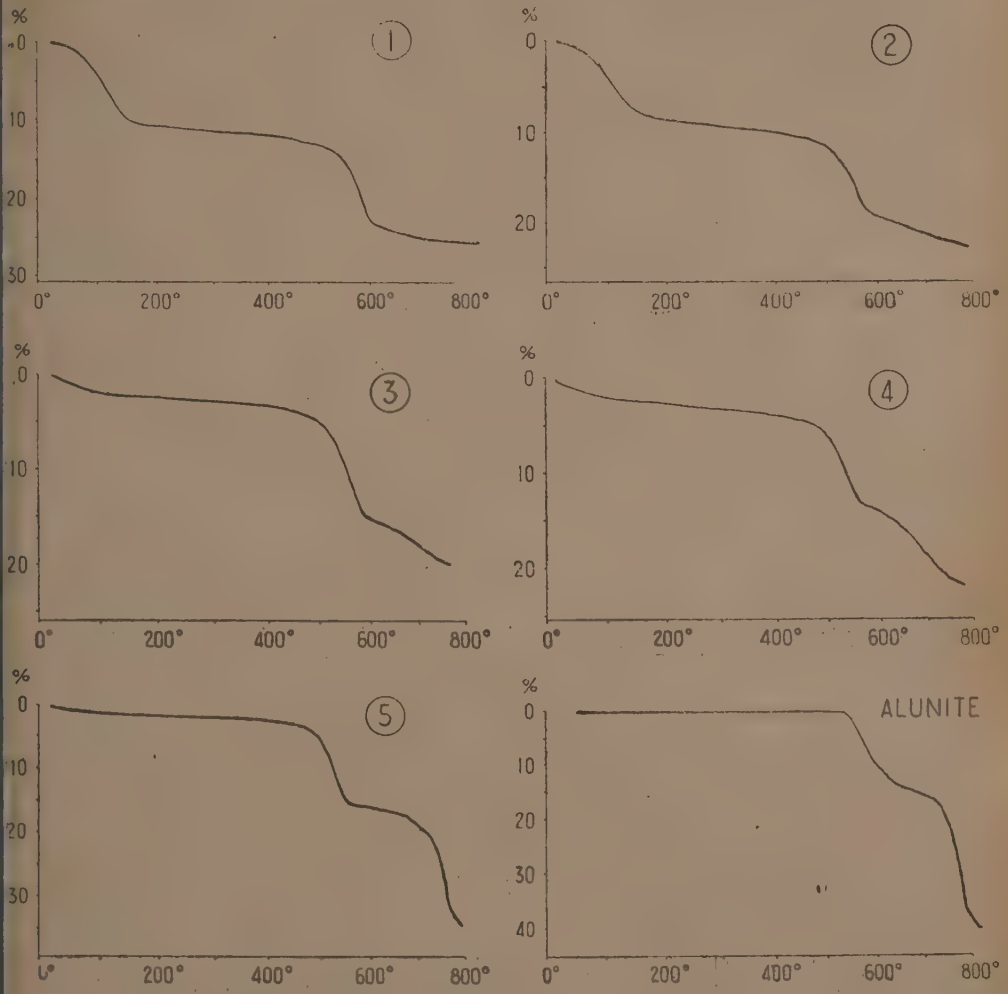


Fig. 2.

La presenza di halloysite è resa evidente dallo studio del campione N. 1. In questo campione è molto piccolo il contenuto di SO_3 e quindi di alunite.

Dall'esame del suo spettro (Fig. 1, spettro N. 6) risulta che il costituente siallitico non è il caoliuo (Fig 1, spettro N. 8) in accordo con quanto si può dedurre dalla curva di disidratazione (Fig. 2, N. 1)

L' elevata perdita di peso a bassa temperatura del materiale seccato all' aria corrisponde alla trasformazione dell' halloysite in metahalloysite. È noto infatti che l' halloysite perde con facilità, anche a bassa temperatura, due delle sue quattro molecole di acqua trasformandosi in metahalloysite. Quest' ultima sostanza è del tutto analoga alla caolinite per la composizione chimica e solo si differenzia debolmente per la struttura.

Il prodotto seccato all'aria ha un peso specifico di 2,28; per l'halloysite è riportato nella letteratura il valore di 2,20 [1]).

La misura dell' indice di rifrazione ha inoltre fornito un valore molto prossimo a 1,535, in buon accordo con i valori determinati da Mehmel [2]) per cinque campioni di halloysite di diversa provenienza, campioni per i quali sono stati osservati degli indici variabili tra 1,526 e 1,542.

A seguito del riscaldamento a 120°, corrispondentemente alla perdita di circa la metà dell' acqua, il valore dell'indice di rifrazione aumenta avvicinandosi a 1,56. Per la caolinite il valore dell'indice di rifrazione è leggermente superiore: 1,565.

Lo spettro del materiale disidratato, molto simile ma non del tutto uguale a quella del caolino, è riportato dalla Fig. 1 (spettro N. 7). Esso coincide con quello della metahalloysite.

I risultati dell' assieme delle indagini espletate mostrano che i campioni prelevati dalle cave di Fiano Romano sono costituiti prevalentemente da halloysite e da alunite in rapporto variabile da campione a campione.

L' eterogeneità dell' intera formazione importa pertanto la necessità di dover procedere ad un' accurata cernita su piazzale onde poter scegliere i materiali halloysitici più puri, che sono più pregiati ai fini delle applicazioni pratiche.

---

[1]) Urbain P., *Introduction à l' étude petrographique et géochimique des roches argileuses.* Parigi, 1937.

[2]) *Über die Struktur von Halloysit und Metahalloysit.* Zeit. Krist. Ab. A. vol. 90; p. 35 (1935).

Il problema della gonalità

del prof. **Federico Amodeo**, *presentata dal socio corr.* **G. Gallucci**

(Adunanza del dì 7 dicembre 1940 - XIX).

Sunto. — Si fa un cenno dei tentativi fatti per risolvere questo problema da Abel ai giorni nostri. Si determina la gonalità delle curve regolari nel loro ordine. Si stabiliscono i teoremi fondamentali generali riguardanti la gonalità delle curve singolari e si classificano le curve singolari di un determinato ordine m, dalla massima gonalità $m-1$ alla gonalità 1. Si mostrano i caratteri principali delle curve k-gonali singolari e si determina l'inviluppo delle rette che segano la g_k^1. Si mostrano i quadri delle curve di gonalità 2, 3, 4 ... Infine si perviene alla determinazione delle *curve normali piane* di qualunque gonalità, già annunziata all'Accad. Gioenia di Catania dal 20 Novembre 1939 - XVIII.

Sic vos non vobis fertis aratra boves.

Virgilio

§ 1. *Tentativi per la risoluzione del problema.*

1. Il problema di trovare il minimo gruppo di punti variabili che un sistema di curve può segare sopra una curva irreducibile C_p^m di ordine m di genere p fu impiantato da Abel nella Memoria presentata il 30/10 1826 all'Accad. d. Sc. di Parigi [1]) che conteneva le sue mirabili scoperte sugli integrali, ora detti *abeliani*. Ivi, nel § 8, applicò la sua teoria ad una particolare funzione di 14.° ordine, ma di grado 13 nella y e di grado 5 nella x, e trovò che questo numero che egli indicava con γ è 38 [2]).

B. Riemann riprese questo problema di minimo nella Memoria pubblicata nel 1857, nel Journ. f. Mathem. [3]). Ivi, nel § 5, precisa la equazione della funzione $F(s^{m_1}, z^{m})=0$ e, indicando con k il numero dei poli che la

[1]) Abel, *Mémoir sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendentes*, 2.ª ed. *Opere di* Abel curata da Lie e Sylow, 1881, n. XII p. 142-211, pubblicata la prima volta nel 1841 in Mém. d. Sav. Etrangers.

[2]) Amodeo, *La curva di* Abel *di gonalità* 38, Giorn. di Battaglini v. 76. 1938-39.

[3]) B. Riemann, *Theorie der Abelschen Functionen*, v. 54.

funzione può avere, conchiuse che, per esser minimo k, deve essere il *genere* della funzione

$$p \leq 2k - 2,$$

nella ipotesi che la funzione sia di *moduli* generali.

Questo valore fu limitato da noi a $2k-2$, $2k-3$ fin dal 1893 [1]), limitazione che è stata confermata anche da Bertini [2]) e da Severi [3]).

Il concetto di Abel era però diverso da quello di Riemann, perchè Abel riteneva come minimo quel gruppo segato da curve che passano per tutti i punti fissi comuni alla C_p^m ed al sistema delle curve che determinano i gruppi, e Riemann invece quelli segati anche da curve che passano soltanto per una parte dei punti fissi.

2. In seguito Clebsch-Gordan [4]) ritennero di aver trovato una categoria di curve normali piane col teorema:

Ogni curva di genere p *si può trasformare univocamente in una curva dello stesso genere e di ordine* $p+1$ *con* $\frac{1}{2}p(p-3)$ *punti doppi.*

Ma questo teorema, quantunque tenuto in grandissimo conto, è ben lontano dal dare curve abbastanza semplici, tanto meno *normali piane.*

Invece quegli che trovò una prima categoria di *curve normali piane* fu Cremona nella Mem. *Sulle curve iperellittiche* (Rend. Ist. Veneto, 1869, p. 566-571) ove dimostrò, per $k=2$, che *alle curve iperellittiche* C_p^{2p+2} *con un punto* V p-uplo *sono riducibili con trasf. biraz. tutte le curve* C_p^n *iperellittiche con un punto* p-uplo *e altri punti doppi,* e che esse sono omologico-armoniche col centro di omologia in V. Questo teorema fu confermato da Brill e Nöther, dimostrando nel 1873 che:

Le curve iperellittiche di genere p *sono trasformabili in curve* C_p^{p+2} *di ordine* $p+2$ *con un punto* p-*úplo* [5]).

3. Però essi vollero riprendere il problema più in generale, cercando *la serie* g_n^r *di più piccolo ordine* n che possa esistere sopra una curva C_p^m di ordine m e di genere p, e trovarono, limitatamente ad $r=1$, che, se $p=2q$ o $2q+1$, il massimo valore di n è sempre $p+1-q$, sia quando

---

[1]) Amodeo, *Curve k-gonali*, Ann. di Mat. v. 21, 1893, p. 223.

[2]) Bertini, Ann. di Mat. v. 22, 1894, nota della pag. 29.

[3]) Severi, Rend. di Palermo. v. del 1922 p. 116.

[4]) Clebsch-Gordan, *Theorie der Abelschen Functionen*, 1866, p. 65.

[5]) Brill-Nöther, v. 7 dei Math. Ann. 1873, p. 285.

di serie g^1_n ve ne siano ∞, come avviene per $p = 2q$, sia quando ve ne siano un numero finito, come avviene per $p = 2q + 1$.

Per il caso di $r > 1$ dettero un teorema per i casi di $r = 2$, o 3, che fu generalizzato da LINDEMANN [1]) per r qualunque nel seguente teorema:

Se $p = (r+1)q, (r+1)q+1, (r+1)q+2, (r+1)q+3, \ldots (r+1)q+r$, il minimo valore di n è sempre $p+r-q$.

Ma su questo risultato vi sarebbe molto da dire.

4. Il teorema di CLEBSCH-GORDAN fu enunciato sotto forma più precisa da SEGRE [2]) nel seguente modo:

Ogni curva di genere p *dotata di una* g^1_k *può essere trasformata in una curva di ordine* $p+2$ *con un punto* $(p+2-k)$-uplo (più altri eventuali punti doppi) *la* g^1_k *essendo allora segata dalle rette che passano pel punto multiplo.* Però questo teorema non assicura che la curva *non* possa avere una $g^1_{k'}$ di ordine $k' < k$.

Nel caso di $k = 2$, esso rientra nel teorema di CREMONA e soltanto per esso determina una curva normale.

5. Fu soltanto nel 1900 che fu possibile di enunciare un teorema sulle *curve normali piane* per $k = 3$, e fu quello da noi comunicato ai Comptes Rendus di Parigi nel giugno 1900, per prender data, ed illustrato con una conferenza al 2.° Congresso internazionale dei Matem. a Parigi tenutosi il 1900, volgarizzata in italiano [3]). Non fu avvertita l'importanza del teorema fino al 1928. Su questo ritorneremo in seguito.

6. Per cercare la risoluzione completa di questo problema per qualunque valore di k abbiamo ritenuto utile di enunciarlo nella seguente forma:

Cercare quale è il minimo ordine m *di una curva* C^m_p *di determinato genere* p, *che possa avere come serie lineare minima semplicemente infinita una* g^1_k **completa** [4]) *di ordine* k, *tenendo conto della distribuzione nel piano delle singolarità ordinarie della curva.*

---

[1]) CLEBSCH-LINDEMANN, *Leçons de Géométrie*, trad. francese, v. 3 1879, p. 58.

[2]) SEGRE, *Recherches sur les courbes et surfaces réglées algébriques.* Math. Ann. v. 30, 1887, p. 220.

[3]) AMODEO, *Courbes trigonales du plan. C. R. Paris 1900 Giugno;*

— *Coup d'oeil sur les courbes algébriques au point de vue de la gonalité.* 2.me Congrès intern. des Mathem. Paris 1900. — *Uno sguardo alle curve algebriche dal punto di vista della gonalità*, Periodico di Matem. v. 16. 1900.

[4]) Insistiamo sul carattere *completo* che deve avere la serie lineare g^1_k, perchè,

Così il numero k rappresenta la gonalità della curva e il minimo numero m darà la *curva normale* di questa gonalità nel dato genere p.

Qui troviamo utile di trattare l'argomento prima per le curve *regolari* nell'ordine, poi per le curve *singolari*, avvertendo che per le curve regolari ci atteniamo alla gonalità nel senso *abeliano*, che la g_k^1 debba essere segata da sistemi di curve aggiunte completi e non da curve che passino soltanto per una parte dei punti multipli della curva C_p^m, come sarebbero p. es. le rette che passano per un solo punto doppio. Per le curve singolari ci atterremo al concetto riemanniano di considerare la g_k^1 comunque segata sulla curva C_p^m da curve parziali di curve aggiunte.

Risultano due importanti fenomeni: l'uno che le curve regolari nell'ordine sono una particolare categoria delle infinite categorie delle curve singolari; l'altro che i numeri ρ_α, che assegnano la dipendenza dei punti doppi della curva, sono da considerarsi come *moduli* della curva C_p^m.

Il teorema a cui perverremo nel n. 9 del § 6 lo abbiamo comunicato, per prender data, fin dal 20 Nov. dello scorso anno 1939-XVIII, all'Accademia Gioenia di Catania [1]).

§ 2. *La gonalità nelle curve regolari nel loro ordine.*

1. Per le curve regolari il problema della gonalità, nel senso sopra espresso, è risoluto dal *triangolo parabolico* dato da noi nella p. 16 della Nota *Nuovo metodo*... [2]) che ho avuto l'onore di presentare a questa illustre Accademia il 1.° dicembre 1938.

Esso assegna la gonalità, nel *senso abeliano*, di qualunque curva C_p^m di ordine anche elevatissimo, purchè sia regolare nel suo ordine e fa conoscere anche l'ordine della curva aggiunta che sega la serie minima g_k^1. Ciò perchè nel teor. 2.° (p. 7 di quella Nota) è dimostrato che alle differenze

$$p-(k-1)=1,\quad 3,\quad 6,\quad 10,\quad 15,\quad 21,\quad 28,\quad 36\ldots$$

---

se la serie g_k^1 è contenuta in un altra g_k^2, g_k^3, ..., essa non deve considerarsi di ordine minimo, potendosi con 1, 2,... punti fissi ottenersi da essa una serie di ordine minore. Così per le coniche non possiamo parlare di serie minima g_2^1 segata da fasci di rette che hanno i centri fuori della curva, essendo queste contenute nella g_2^2 segata dalle rette del piano.

[1]) Amodeo, *Curve normali piane di gonalità k.* Rend. Acc. Gioenia di scienze naturali in Catania, serie III, 1939, fasc. XIII.

[2]) Amodeo, *Nuovo metodo per la Geometria delle serie lineari delle curve algebriche* in questi Rend. vol. 9. 1938-39, III.

fra il genere p e $k-1$ corrispondono le curve agg $C^{m-3-\alpha}$ con

$$\alpha = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \ldots \text{ [1]}.$$

Così p. es. si trova nel quadro suddetto che la curva C_9^{10} è di gonalità 9, perchè possiede come minima la g_9^1 lineare completa, e poichè la differenza fra il genere 9 e $k-1$ è 1, a cui corrisponde $\alpha = 0$, le ∞^7 g_9^1 son segate da curve aggiunte $C^{m-3} = C^7$.

Invece le g_9^1 della curva C_{36}^{10} danno $p-(k-1) = 36-8 = 28$, a cui corrisponde $\alpha = 6$ e quindi si conchiude che le g_9^1 della C_{36}^{10} son segate dalle curve agg. $C^{m-9} = C^1$ che passano per ogni singolo punto della curva.

Così pure nella C_{22}^{10} la serie minima è la g_{17}^1, la curva è quindi di gonalità 17, e siccome $p-(k-1) = 22-16 = 6$, a cui corrisponde $\alpha = 2$, si conchiude che la detta serie è segata da curve agg. $C^{m-5} = C^5$; mentre nella curva C_{31}^{10} pure di gonalità 17, la serie g_{17}^1, per essere $p-(k-1) = 31-16 = 15$, cui corrisponde $\alpha = 4$, è segata da curve agg. $C^{m-7} = C^3$.

2. Dal triangolo parabolico risultano pure altri dati sulla natura della curva; p. es. la prima linea parallela (in grosso modo) al lato curva del triangolo parabolico segna tutte curve *unicursali* (razionali), la diremo perciò *linea del genere zero*.

La seconda linea indica tutte le curve *di genere uno*, le *curve ellittiche*, che hanno per serie minima la g_2^1 e che essa ne possiede in numero infinito e precisamente in numero ∞^1 nella C_1^3, ∞^2 nella C_1^4, ∞^3 nella C_1^5 ... ecc.; questa si può dire la *linea del genere uno*.

La terza linea (*linea del genere due*) segna tutte le curve *iperellittiche* di genere 2, che hanno una sola g_2^1 e sono le curve C_2^4, C_2^5, C_2^6, ...

La quarta linea (*linea del genere tre*) a partire dalla C^4 segna tutte le *curve trigonali*, le quali posseggono tutte ∞^1 g_3^1 segate da curve agg. C^{m-3}; esse sono C_3^4, C_3^5, C_3^6 ...

La quinta linea (*linea del genere quattro*), a partire dalla C_4^5, segna

---

[1]) Nel quadro del triangolo parabolico sarà utile aggiungere nella linea al disotto delle parentesi, per le successive parentesi, i simboli

$$\infty^1\infty^0 \; ; \quad \infty^2\infty^1\infty^0 \; ; \quad \infty^3\infty^2\infty^1\infty^0 \; ; \quad \infty^4\infty^3\infty^2\infty^1\infty^0 \; ; \ldots$$

con ciò viene indicato l'ordine di infinità delle serie g_k^1 esistenti sulla curva.

tutte le curve di genere 4, che sono *tetra-gonali* con ∞^2 g_4^4 segate da curve agg. C^{m-3} e sono C_4^5 , C_4^6 , C_4^7 ...

In generale, a partire dalla curva C_k^{k+1} (di ordine $k+1$ di genere k) la linea $(k+1)$esima parallela al lato curvo del triangolo (*linea del genere k*) segna tutte le curve regolari nel loro ordine che sono *k-gonali*, esse posseggono ∞^{k-2} g_k^1 segate da curve agg. C^{m-3}. In altre parole si ha il seguente teorema:

Tutte le curve di genere k, *di ordine qualsiasi purchè* $\geq k+1$ *e regolari nel loro ordine, sono curve k-gonali ed hanno* ∞^{k-2} g_k^1 *segate da curve agg.* C^{m-3}.

Però oltre a queste curve k-gonali di genere k, come il triangolo mostra, vi sono altre curve k-gonali di generi differenti: la C_π^{k-1} con ∞^1 g_k^1 segate dai fasci di raggi che hanno i centri nei punti della curva; la $C_{\pi-1}^{k+2}$ con 1 solo punto doppio che ha una sola g_k^1; la C_{k+2}^{k+1} con ∞^1 g_k^1 (eccetto per $k=3$); la C_{k+3}^{k+3} con 1 sola g_k^1; la C_{k+2}^k con ∞^3 g_k^1.

3. Se leggiamo il triangolo per linee orizzontali, cioè se consideriamo le curve k-gonali dello stesso ordine, dobbiamo, per facilitazione, distinguere le curve di ordine m con gonalità $\leq m-1$ da quelle con gonalità $\geq m$.

Fra le prime vi sono in ogni orizzontale tre curve di gonalità $m-1$ e tre di gonalità $m-2$. Le prime tre sono la C_π^m con ∞^1 g_{m-1}^1; la C_{m+1}^m con ∞^1 g_{m-1}^1; la C_{m-1}^m con ∞^{m-3} g_{m-1}^1. Le altre tre sono la $C_{\pi-1}^m$ con 1 sola g_{m-2}^1; la C_m^m con una sola g_{m-2}^1 e la C_{m-2}^m con ∞^{m-4} g_{m-2}^1.

Per le gonalità $\geq m$, per chiarezza parleremo sopra l'esempio delle curve di ordine dieci, le C^{10}.

A sinistra di ogni gruppo di colonne (quando si escludono il primo gruppo a sinistra e i due ultimi gruppi a destra) le gonalità sono

$$g_{14}^4 \ , \ g_{17}^1 \ , \ g_{18}^1 \ , \ g_{17}^1 \ , \ g_{14}^4 .$$

Le serie g_{14}^4 di destra sono segate da curve agg. $C^6 = C^{m-4}$ sulla C_{16}^{10} e sono ∞^6; quelle di sinistra sono segate da curve agg. $C^2 = C^{m-7}$ sulla C_{34}^{10} e sono ∞^2.

Le serie g_{17}^1 di destra sono segate da curve agg. $C^5 = C^{m-5}$ sulla C_{32}^{10} e sono ∞^5; quelle di sinistra sono segate dalle agg. $C^3 = C^{m-7}$ su C_{31}^{10} e sono ∞^3.

Le serie g_{18}^1 sono segate da curve agg. $C^4 = C^{m-6}$ sulle C_{27}^{10} e sono ∞^4.

Possiamo infine notare che ci sono tre curve C^{10} 8-gonali, le cui g_8^1 sono segate da curve agg. C^1, C^6 e C^7 e sono le curve C_{35}^{10} C_{10}^{10} e C_8^{10}; che vi sono curve di gonalità 12, 13, 14, le cui serie sono segate da curve agg. C^6 sulle C_{14}^{10} C_{15}^{10} C_{16}^{10} e altre le cui serie sono segate da curve agg. C^5 sulle C_{17}^{10}, C_{18}^{10}, C_{19}^{10}; che vi sono cinque C^{10} di gonalità 14 e sono le C_{16}^{10}, C_{19}^{10}, C_{23}^{10}, C_{28}^{10}, C_{34}^{10}, che vi sono tre C^{10} di gonalità 15, ecc., ecc.

Dello stesso triangolo per le curve di ordine 14 si è rilevato che vi è una sola curva di questo ordine che ha la gonalità 38 e questa è la curva C_{38}^{14} con 20 punti doppi indipendenti, su cui le curve agg. C^6 segano la g_{44}^7 e quindi quelle che passano per 6 punti generici della curva segano ∞^6 g_{38}^1, Ci siam permessi di chiamare questa *la curva di Abel di gonalità* 38, per averla egli trattata nel § 8 della sua Memoria del 1826 [1]).

4. Leggendo per colonna nel triangolo parabolico, cioè considerando le curve regolari che hanno lo stesso numero di punti doppi, si deduce:

Sono curve k-gonali le curve regolari di ordine $k+1$ *che si trovano nella* $(k+1)$*-esima e nella* $(k+3)$*-esima colonna a cominciare da destra e nella prima colonna a cominciare da sinistra; cioè le curve* C_k^{k+1}, C_{k+2}^{k+1}, C_π^{k+1}, *sulle quali esistono rispettivamente* ∞^{k-2} g_k^1 *segate da* C^{m-3} *agg.,* ∞^1 g_k^1 *segate da* C^{m-k} *agg. e* ∞^1 g_k^1 *segate da* $C^1 = C^{m-k}$ *agg.*

Sono inoltre k-gonali le curve regolari di ordine $k+2$ *che si trovano nella k-esima e* $(k+2)$*-esima colonna a cominciare da destra e nella 2.ª colonna a cominciare da sinistra; cioè le curve* C_k^{k+2}, C_{k+2}^{k+2}, $C_{\pi-1}^{k+2}$ *sulle quali esistono rispettivamente* ∞^{k-2} g_k^1 *segate da* C^{m-3} *agg.,* 1 *sola* g_k^1 *segata da* C^{m-k} *agg. e* 1 *sola* g_k^1 *segata da* $C^1 = C^{m-k-1}$ *agg.*

Da tutto ciò risulta che il più basso ordine per le curve regolari per le quali esistono g_k^1 minime è $k+1$.

Vedremo che esso è pure il *minimo* ordine per le curve singolari.

5. Nel triangolo parabolico non sono considerate le serie g_{m-2}^1 segate sulle curve regolari C^m, provviste di più di un punto doppio, dai fasci di raggi che hanno per centri ciascuno dei punti doppi, perchè queste serie segate da parte delle curve agg. riducibili devono essere considerate nel *senso abeliano* provviste di punti fissi che elevano l'ordine della serie.

Per es. nella C_{34}^{10} con 2 punti doppi D, D' le coniche agg. segano una g_{16}^3

[1]) Cfr. nota [1]) e [2]) della pagina 1.

quindi essa contiene $\infty^2 g^1_{14}$ segate da coniche agg. che passano per 2 punti generici della curva. Se i due punti si scelgono per diritto con un punto doppio D, la conica si spezza in una retta fissa e una retta variabile intorno all'altro punto D' e la $g^1_{14} = g^0_6 + g^1_8$. Cosicchè, nel senso abeliano, la g^1_8 segata dal fascio di raggi di centro D' deve essere completata dai 6 punti fissi della g^0_6 segata dalla retta fissa. Ciò spiega la diversità della gonalità considerata nei due sensi *abeliano* e *riemanniano*.

§ 3. *La gonalità delle curve nel senso riemanniano.*

1. Per considerare il problema della gonalità nelle curve singolari occorre considerare necessariamente anche curve con punti di multiplicità maggiore di 2. Qui supporremo la esistenza di curve di dato ordine m, di dato genere p con punti assegnati di date multiplicità ordinarie.

La dimostrazione di questo teorema la faremo conoscere quando lo riterremo opportuno. Ammessa questa esistenza, ricordiamo quanto abbiamo esposto nella Nota 2.ª accolta anche in questo Rend. l'11 Novembre 1939 [1]), sulle condizioni di esistenze delle curve agg. di ordine $m-3-\alpha$.

Ivi, a pag. 7 (§ 2, n. 3) partendo dal valore di

$$R_\alpha = p - 1 - m\alpha + \frac{\alpha(\alpha+3)}{2} + \rho_\alpha$$

abbiamo assegnato per l'esistenza delle curve agg. C^{m-3-k} il *minimo assoluto* del genere

$$p_a = \frac{\alpha m}{2} + 1$$

e il *minimo relativo*

$$p_r = \frac{\alpha m}{2} + 1 + \delta_\alpha = \frac{\alpha}{2}(2m - 3 - \alpha) + 1$$

raggiungibili o non secondo che αm è pari o dispari.

Aggiungiamo ora che quando si voglia che la curva agg. $C^{m-3-\alpha}$ di ordine $m-3-\alpha$ sia *minima* occorre che non esista un'altra curva agg. di ordine $m-3-(\alpha+1)$ e quindi il valore di p non deve soddisfare alla condizione detta sopra; dunque:

La condizione perchè la C^m_p *abbia* $C^{m-3-\alpha}$ *per curve agg. minime*

---

[1]) Amodeo, *I numeri* ρ_α *nel nuovo metodo per la geometria delle serie lineari delle curve algebriche*, v. 10, 1939-40.

è, per le curve singolari, che abbia il genere $p \leq \frac{1}{2}(\alpha+1)m$, *se* $(\alpha+1)$ m *è pari, oppure* $p \leq$ *all'intero prossimamente superiore ad* $\frac{1}{2}(\alpha+1)m$, *se* $(\alpha+1)m$ *è dispari.*

Per le curve regolari questa condizione si limita al genere

$$p \leq \frac{1}{2}(\alpha+1)\big(2m-3-(\alpha+1)\big).$$

Ora dobbiamo fare una più delicata e fondamentale osservazione. I valori π, p_r, p_a del genere p, si succedono nell'ordine indicato dalla figura seguente

π	p_r	p_a
$\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$	$\frac{\alpha}{2}(2m-3-\alpha)+1$	$\frac{\alpha m}{2}+1$

Nell'intervallo $|\pi, p_r|$, compreso l'estremo destro, i punti doppi o multipli della curva C_p^m possono rappresentare condizioni tutte indipendenti e allora $\rho_\alpha = 0$ (il caso contrario può avvenire ed è stato da noi considerato fin dal 1895, ma per ora lo escludiamo per trattarlo in un altro momento a parte); qui consideriamo soltanto quelle curve che sono regolari nel primo intervallo e non lo sono nel secondo, esse hanno curve agg. $C^{m-3-\alpha}$ in numero variabile da ∞^{R_α} ad ∞^0. Nell'estremo destro p_r vi è una sola curva $C^{m-3-\alpha}$ che sega C_p^m in $2\delta_\alpha$ punti fissi, cioè determina sulla C_p^m una $g^0_{2\delta_\alpha}$. Nell'intervallo $|p_r, p_a|$ esiste sempre una sola curva $C^{m-3-\alpha}$, che sega la C_p^m in punti fissi variabili da $2\delta_\alpha$ a zero o ad uno, secondo che sia αm pari o dispari, mentre il numero ρ_α varia da 1 a $\delta_\alpha = \frac{1}{2}\alpha(m-3-\alpha)$. In esso i punti doppi sono dipendenti e perciò soltanto in questo intervallo la curva C_p^m è singolare.

2. Esempii. 1.° Le curve C^{10} hanno curve agg. $C^2 = C^{10-3-5}$, fino a che il genere discende da 36 al minimo assoluto 26, nel qual caso i 10 punti doppi stanno tutti su una conica, che non sega ulteriormente la curva C^{10}. Se però i punti doppi sono indipendenti, il genere può discendere soltanto da 36 a 31 (minimo relativo). Ma perchè la C^2 agg. sia *minima* il genere deve essere $p \leq \frac{1}{2}6m$, cioè ≤ 30 se la curva è *singolare* e $p \leq 33$ se la curva è regolare.

36	33	30
36	31	26

2.° Le curve C^9 hanno cubiche agg. $C^3 = C^{9-3-3}$ fino a che il genere

discende dal massimo 28 a 15 $\left(p \geq 14\frac{1}{2}\right)$ e nel caso limite l'unica cubica agg. sega la curva C^9 in un sol punto (g_1^0) fuori dei punti multipli. Se però la C^9 è regolare il genere può variare soltanto da 28 a 19 $(\geq \frac{1}{2}\ 3.12$, e in questo caso i 9 punti doppi appartengono ad una sola cubica, che sega la C^9_{19} in 9 punti fissi. Ma affinchè la C^3 agg. sia *minima* il genere deve essere $p \leq 18$ se C^9 è singolare e $p \leq 22$ se regolare.

3.° Per le curve C^{18} non esistono C^1 agg., cioè le C^2 agg. sono *minime*

per le curve singolari se $p \leq 126$ oppure $d \geq 10$
e per le curve regolari se $p \leq 133$ » $d \geq 3$.

Non esistono C^2 agg., cioè le C^3 agg. sono *minime* per

curve C^{18} singolari, se $p_1 \leq 117$ oppure $d \geq 19$
e per C^{18} regolari se $p \leq 130$ » $d \geq 6$, ecc. ecc.

In generale, per le curve C^{18} a cominciare dal genere 135, se sono singolari ve ne sono 9 che hanno per curve agg. minime le C^1 agg., 9 che hanno per curve agg. minime le C^2, 9 che hanno per curve agg. minime le C^3 ecc., sempre per gruppi di 9 curve ciascuno; mentre per le curve regolari i gruppi successivi contengono 2, 5, 9, 14... curve rispettivamente

3. Per schiarimenti degli sviluppi che seguono occorrono i seguenti teoremi da noi enunciati fin dal 1893 [1]).

Teor. 1.° *Se una* C^m_p *è k-gonale e possiede almeno una curva agg.* C^{m-k-1} *di ordine* $m-k-1$, *la* g^1_k *deve avere i suoi gruppi* G_k *collineari.*

Teor. 2.° *Se una* C^m_p *è k-gonale e possiede* ∞C^{m-k-1}, *ogni* g^1_k *è segata da fasci di* C^{m-k-1} *agg.*

Teor. 3.° *Se una curva* C^m_p *è k-gonale, non può possedere curve agg.* C^{m-k-2} *di ordine* $m-k-2$.

È da avvertire che il teorema 1.° ha luogo in tutto l'intervallo $|\pi, p_a|$; che il teorema 2.° ha luogo nello intervallo $|\pi, p_r|$ e che il teor. 3.° non

---

[1]) Amodeo, *Curve k-gonali*, Ann. di Mat. v. 21, 1893 p. 8, riprodotti integralmente da Bertini nella p. 29 del v. 22. 1894 degli stessi Ann. Mat. senza dedurne nuove conseguenze.

esclude che vi siano curve *k-gonali* senza curve agg. C^{m-k-1}; ma che per quelle curve che posseggono le dette agg. minime, essendo

$$m-k-1=m-3-(k-2)$$

il genere deve essere $p \leq \frac{4}{2}(k-1)(2m-k-2)$

e che per esse i valori di *minimo relativo* e *minimo assoluto* prendono la espressione

$$p_r=\frac{k-2}{2}(2m-k-1)+1 \quad , \quad p_a=\frac{k-2}{2}m+1.$$

4. Si deduce da ciò il seguente teorema:

Teor. 4.° *Il genere delle curve k-gonali* C_p^m *provviste di curve agg. minime* C^{m-k-1} *può variare fra i limiti*

$$\frac{k-1}{2}(2m-k-2) \quad \text{e} \quad \frac{k-2}{2}m+1.$$

Il limite superiore $p=\frac{k-1}{2}(2m-k-2)$ lo indicheremo con p_t e poichè

$$\frac{k-1}{2}(2m-k-2) \geq \frac{k-2}{2}(2m-k-1)+1$$

ed il segno $=$ ha luogo soltanto per $k=m-1$ nel qual caso $p=\pi$, risulta che gli intervalli nei quali può variare il genere della C_p^m k-gonale con curve agg, minime sono i seguenti:

$$\underset{\frac{k-1}{2}(2m-k-2)}{p_t} \qquad \underset{\frac{k-2}{2}(2m-k-1)+1}{p_r} \qquad \underset{\frac{k-2}{2}m+1}{p_a}$$

con l'avvertenza che nel primo intervallo $|p_t, p_r|$ compreso l'estremo destro le curve qui considerate sono regolari, ed hanno un numero di C^{m-k-1} che varia da $\infty^{R_{k-2}}$ ad ∞^0, e nel secondo intervallo, escluso l'estremo sinistro, le curve sono singolari e posseggono una sola C^{m-k-1} per la quale i punti multipli della curva hanno una dipendenza ρ_{k-2} variabile da 1 a $\frac{1}{2}(k-1)(m-k-1)$.

Teor. 5.° *Ogni* $C^{m-3-\alpha}$ *agg. alla curva k-gonale* C_p^m *che possiede almeno una* C^{m-k-1} *agg. minima, se passa per* $k-1-\alpha$ *punti di un gruppo* G_k *della* g_k^1, *passa per tutti i rimanenti punti.*

La dimostrazione di questo teorema fu da me data nel 1897 [1]) pel caso generale, dopo averlo dimostrato pel caso particolare di $k=3$ [2]); KÜPPER lo aveva dimostrato soltanto per le C^{m-k} [3]).

Ora questo teorema è vero anche nella seguente forma (per una qualunque serie g_n^r speciale) ciò che rappresenta una meravigliosa e semplice estensione del teorema di RIEMANN e ROCH alle curve agg. di ordine minore di $m-3$.

Teor. 6.° *Ogni* $C^{m-3-\alpha}$ *agg. alla curva* C_p^m *k-gonale, provvista di almeno una* C^{m-k-1} *agg. minima, che passa per* $n-r-\alpha$ *punti di un gruppo* G_n *di una serie* g_n^r *speciale esistente sulla* C_p^m, *passa per tutti i rimanenti.*

Infatti la $C^{m-3-\alpha}$ agg. che passaper i punti $A_1\ A_2 \ldots A_{n-r-\alpha}$ del gruppo G_n, insieme ad α rette arbitrarie che passino per altri α punti del gruppo, costituiscono una C^{m-3} agg., che, passando per $n-r$ punti del gruppo G_n, deve passare per i rimanenti; ma le rette non vi passano, dunque deve passarci la $C^{m-3-\alpha}$.

Coroll. *Ogni gruppo della* g_n^r *speciale vale* $n-r-\alpha$ *condizioni lineare per le* $C^{m-3-\alpha}$ *agg.*; quindi, come vale $n-r$ condizione per le C^{m-3} agg., vale $n-r-1$ condizioni per le C^{m-4} agg., $n-r-2$ condizioni per le C^{m-5} agg. ecc., due condizioni per le C^{m-k} agg.

Coroll. *Limitatamente alle* g_k^1 *collineari, ogni gruppo* G_k *vale una condizione per le* C^{m-k-1} *curve agg., due condizioni per le* C^{m-k} *agg., tre condizioni per le* C^{m-k+1} *agg.* ecc. Si vedrà in seguito che:

Teor. 7.° *Sulle* C_p^m *k-gonali singolari* (provviste di una sola C^{m-k-1} agg. minima) *i gruppi della* g_k^1 *sono segati da* C^{m-k} *agg.*

§ 4. *Sommaria classificazione delle curve k-gonali di ordine* m.

I. In quanto segue considereremo che ogni punto di una curva C_π^m di genere massimo π rappresenti una curva agg. alla data di ordine zero.

Ciò posto ci proponiamo di esaminare se del Teor. 1.° può aver luogo l'inverso così concepito:

---

[1]) AMODEO, *Curve k-gonali di S^esima specie* (Atti R. Acc. Napoli, v. 9, 1897 p. 4).

[2]) AMODEO, *Curve k-gonali di 1.ª e di 2.ª specie* (Ann. di Mat. v. 24, 1895 p. 14).

[3]) KÜPPER, *Ueber k-gonale Curven*, (Sitz. ber. boh. G. d. W. 1895, 2ª ed. Monatshefta 1897).

Se una curva C_p^m *possiede come minima agg. la curva* C^{m-k-1} $(k < m)$ *può essa avere una o più* g_k^1 *a gruppi collineari?*

2. Cominciamo dal caso più semplice: $m-k-1=0$.

Deve essere $k=m-1$ e quindi il problema è questo:

Le curve C_π^m, *prive di punti doppi, possono essere* (m − 1)*-gonali con gruppi collineari?*

Qui la risposta è affermativa. *Tutte le* C_π^m *hanno* ∞^1 g_k^1 *a gruppi collineari segate dai fasci di rette che hanno i centri nei singoli punti della curva.* Queste curve però sono curve regolari.

3. Passiamo al caso di $m-k-1=1$; si ha $k=m-2$ e quindi il problema è il seguente: *Le curve che hanno per curve agg. minime le rette possono essere* (m − 1)*-gonali a gruppi collineari?*

Anche qui la risposta è affermativa.

Le curve $C_{\pi-1}^m$ con 1 solo punto doppio e le curve $C_{\pi-2}^m$ con 2 punti doppi, hanno rispettivamente 1 e 2 g_{m-2}^1 collineari. Entrambe queste curve sono regolari.

Però sulle $C_{\pi-2}^m$ le g_{m-2}^1 dal punto di vista abeliano sono segate da coniche spezzate in due rette e perciò ognuna di esse è da considerarsi completata da una g_{m-2}^0 di punti fissi (vedi § 2, n. 5); mentre dal punto di vista riemanniano le due g_{m-2}^1 segate dalle rette sono residue l'una dell'altra rispetto alla g_{2m-4}^2 segata dalle coniche aggiunte.

Oltre a queste due curve vi sono le curve singolari che possono avere fino ad $\left[\frac{m}{2}\right]$ punti doppi per diritto. Per ognuno dei punti doppi si ha un fascio di raggi che sega una g_{m-2}^1 e quindi si completa il teorema dicendo:

Le curve che hanno per curva aggiunta minima la retta unica hanno tante g_{m-2}^1 *a gruppi collineari quanti sono i punti doppi allineati che essa possiede* [1]).

4. Passiamo al caso di $m-k-1=2$; si ha $k=m-3$ e quindi il problema è il seguente: *Le curve che hanno per curve agg. minime le coniche possono essere* (m − 3)*-gonali a gruppi collineari?* Qui la risposta

[1]) Anche per le curve che hanno più di 2 punti doppi non per diritto esistono le dette g_{m-2}^1.

è dubbia, la curva C_p^m può avere da 3 a $d \leq m$ punti doppi che individuano una rete o un fascio di coniche o una conica sola. Quando i punti doppi sono 3 o 4 la rete o il fascio di coniche segano rispettivamente una g_{2m-6}^2 o g_{2m-8}^1 e non già una g_{m-3}^1 come si richiedeva e le curve sono regolari; quindi le curve regolari non possono rispondere al problema.

Occorre prendere in considerazione le curve singolari e avvertire che nel caso che i punti doppi in numero di 3 siano riuniti in un punto triplo V^3 le curve C_{m-3}^m saranno di gonalità $m-3$ e nel caso di 4, 5... m punti doppi, se la curva possiede un solo punto triplo e altri 1, 2... $m-3$ punti doppi la curva sarà sempre $(m-3)$-gonale con una g_{m-3}^1 segata da rette che passano pel punto V^3.

5. Se la curva agg. minima è una cubica sarà $m-k-1=3$ e $k=m-4$ e quindi il problema si enuncia: *Le curve che hanno cubiche per curve agg. minime possono essere* $(m-4)$*-gonali con gruppi collineari?* Qui dobbiamo considerare che i punti doppi possono variare da 6 a $\frac{3m}{2}$ [1]) e che se essi sono 7 o 8 le curve sono regolari e non rispondono al problema, ma se invece si suppone che nel caso di 6 punti doppi questi si riuniscono in un punto quadruplo V^4 essa è $(m-4)$-gonale e lo potrà essere negli altri casi se la curva avrà un punto quadruplo V^4 e altri punti doppi.

6. In generale se la curva agg. minima è una C^α, sarà $m-k-1=\alpha$, $k=m-1-\alpha$, e con ragionamento analogo si trova che *la curva singolare sarà* $(m-1-\alpha)$*-gonale se avrà un punto* $V^{\alpha+1}$ *di molteplicità* $(\alpha+1)$ *e altri punti doppi eventuali.*

Finalmente se la curva agg. minima è di ordine $m-2$, sarà $m-k-1=m-2$, e $k=1$, e si conchiude che *la curva singolare sarà unicursale* (razionale) *se avrà un punto* V^{m-1} *di multiplicità* $m-1$ (nel qual caso non può avere altro punto doppio).

8. I generi delle curve singolari qui esaminate sono compresi nell'uno e nell'altro intervallo considerato nel § 3 n. 4. Nel caso che appartenga al secondo intervallo, e quindi la curva C^{m-k-1} sia unica, la serie g_k^1 deve essere segata da fasci di C^{m-k} agg. Come ciò avviene mostreremo sopra l'esempio delle curve C^{18} di ordine 18 di genere variabile da 136 a zero.

Tralasciando i primi 3 generi 136, 135, 134, sui quali non abbiamo nulla da aggiungere, veniamo alla curva C_{133}^{18} con 3 punti doppi riuniti in un punto triplo V^3, essa è 15-gonale; le sue coniche agg. che segano

---

[1]) Amodeo, *I numeri* ρ_α ... l. c. nel § 1, n. 3.

una g^2_{30} si spezzano in due rette che passano per V e quindi la g^2_{30} si compone di ∞^1 coppie dei gruppi della g^1_{15} e si ha $g^2_{30} = 2g^1_{15}$.

Se la curva C^{18} acquista oltre il punto V^3 un punto doppio D, (quindi di genere 132) le sue coniche agg. segano una g^1_{18} e si spezzano nella retta VD e in una retta variabile che sega la g^1_{15}, quindi $g^1_{28} = g^0_{13} + g^1_{15}$.

Se la curva C^{18} acquista un secondo punto doppio D' non allineato con VD, le coniche agg. si spezzano nelle due rette VD, VD' e segano una $g^0_{26} = 2g^0_{13}$. Per segare la g^1_{15} intervengono le cubiche agg. Queste segano una g^4_{44}, ma si spezzano nelle rette VD, VD' se si obbligano a passare per 2 punti P, P' situati rispettivamente su VD, VD' e nella ∞^2, rette del piano che segano una g^2_{18}, quindi

$$g^4_{44} = 2g^0_{13} + g^2_{18}.$$

Se queste rette variabili si obbligano a passare per V^3, nel qual caso sono assorbiti 3 punti in V, restano ∞^1 rette che segano la g^1_{15}, e risulta

$$g^4_{44} = 2g^0_{13} + g^0_3 + g^1_{15}.$$

Se la curva C^{18} ha 6 punti doppi (C^{18}_{130}) riuniti in un punto quadruplo V^4 (tralasciando il caso che i sei punti doppi appartengano ad una conica) la curva è 14-gonale, poichè le C^3 agg. si spezzano in tre rette ognuna delle quali sega la g^4_{14} e quindi la $g^3_{42} = 3g^4_{14}$.

Se la curva C^{18} acquista ancora un punto doppio D, (quindi C^{18}_{129}) sarà $g^2_{40} = g^0_{12} + 2g^1_{14}$; se acquista ancora un secondo punto doppo D' (C^{18}_{128}), sarà $g^1_{38} = 2g^0_{12} + g^1_{14}$; se acquista un terzo punto doppio D'' (C^{18}_{127}) sarà $g^0_{36} = 3g^0_{12}$.

Qui, per segare la g^4_{14}, suppliscono le C^4 agg. che soggette a 19 condizioni segano una g^5_{54}. Obbligando queste curve a passare per un punto P di VD, per un punto P' di VD', per un punto P'' di VD'', esse si spezzano in 3 rette fisse che segano $3g^0_{12}$ è in una retta variabile del piano che sega la g^2_{18}. Obbligandola ulteriormente a passare per il punto V^4, ove restano assorbiti 4 punti, risulta

$$g^5_{54} = 3g^0_{12} + g^0_4 + g^4_{14}.$$

Analogamente si conchiude per le curve C^{18} con 10 punti doppi assorbiti in un punto V^4, 15 punti doppi assorbiti in un punto V^6, ecc. ecc.

9. Riepilogando possiamo enunciare il seguente teorema:

Fra le curve irreducibili di un qualunque ordine m, *ordinate nell'ordine discendente dei loro generi da* π *a zero, ve ne sono sempre*

1	di gonalità	$m-1$	senza punti doppi	
2	» »	$m-2$	con 1 punto doppio V^2	o due
3	» »	$m-3$	» 1 » triplo V^3	
. . . . .				
i	» »	$m-i$	» 1 » i-uplo V^i	
. . . . .				
$m-2$	» »	2	» 1 » $(m-2)$uplo V^{m-2}	
1	» »	1	» 1 » $(m-1)$uplo V^{m-1}	

sulle quali la serie minima g_k^1, *che ne determina la gonalità, è segata da rette che passano per il punto* V *di molteplicità* m — k *che funzionano come curve agg.* C^{m-k-1} o C^{m-k} [1]).

§ 5. *Caratteri delle curve* k*-gonali con curve agg. minime. Inviluppi dei gruppi* G_k.

1. Questo § è destinato a mettere un poco di maggior ordine e di rendere molto semplice questo argomento, che nel primo periodo di gestazione in memorie mie e di altri è stato espresso in forma piuttosto complicata, mentre ora, dopo di aver precisato ciò che avviene negli intervalli determinati dai valori p_t, p_r, p_a del genere, acquista una sufficiente semplicità e chiarezza.

2. Le curve agg. C^{m-k-1} alle curve C_p^m segano su queste la $(k-1)$-esima serie canonica, i cui caratteri sono [2]).

$$N_{k-2} = 2p - 2 - (k-2)m \quad , \quad R_{k-2} = \frac{N_{k-2}}{2} - (\delta_{k-2} - \rho_{k-2}).$$

Restringendosi al caso che le C^{m-k-1} agg. siano le *minime*, queste formole in funzione del limite superiore p_t divengono

$$N_{k-2} = k(m-k-1) \quad , \quad R_{k-2} = m-k-1$$

e perciò la serie $(k-1)$-esima, vale a dire la minima serie segata sulle C_p^m, è una serie $g_{kR_{k-2}}^{R_{k-2}}$ e, poichè ogni gruppo vale una condizione per le C^{m-k-1}, questa serie risulta composta di R_{k-2} gruppi della g_k^1.

---

[1]) Molte altre cose ci sarebbero da dire in questo §, ma la brevità ci impone di rimandarle.

[2]) Cfr. *I numeri* $\rho_\alpha \ldots$ l. c. § 2 n. 1 e 2.

Queste curve sono le *curve* da noi dette k-*gonali tipiche* e sono tutte contenute nel quadro riportato a p. 15 del § 6 della cit. Mem. *Curve* k-*gonali* del 1893.

Se invece sostituiamo ai valori di N_{k-2} , R_{k-2} il valore p_r, *minimo relativo*, si ha

$$N_{k-2} = (k-2)(m-k-1) \quad , \quad R_{k-2} = 0$$

cosicchè la serie si riduce a $g^0_{(k-2)(m-k-1)} = g^0_{2\delta_{k-2}}$.

Se invece sostituiamo il valore p_a, *minimo assoluto*, si ha

$$N_{k-2} = 0, \text{ o ad } 1 \quad , \quad R_{k-2} = 0.$$

3. Occorre però più particolarmente conoscere le variazioni che subiscono N_{k-2} , R_{k-2} al variare di p da p_t a p_a.

Il genere p_t diminuisce di una unità per ogni nuovo punto doppio che la curva acquista, perciò quando la curva avrà acquistati altri θ punti doppi il genere sarà

$$p = \frac{k-1}{2}(2m-k-2) - \theta .$$

Il numero θ può variare da 1 a $m-k-1$ nell'intervallo $|p_t , p_r|$ e da $m-k$ allo intero massimo contenuto in δ_{k-2} nel 2.° intervallo $|p_r , p_a|$.

Sostituendo questo valore di p nelle formole di N_{k-2} , R_{k-2} si ha

$$N_{k-2} = k(m-k-1) - 2\theta \quad , \quad R_{k-2} = m-k-1-(\theta - \rho_{k-2}),$$

ma, per l'ipotesi fatta innanzi (n. 1 del § 4) nel primo intervallo $\rho_{k-2} = 0$, quindi in esso

$$R_{k-2} = m-k-1-\theta$$

e varia da $m-k-1$ a zero.

Nel secondo intervallo il valore di R_{k-2} resta sempre eguale a zero, perchè la C^{m-k-1} è unica, quindi la differenza $\theta - \rho_{k-2}$ deve rimanere costantemente eguale a $m-k-1$, cioè deve essere

$$\theta = m-k-1+\rho_{k-2}$$

e poichè è noto che $\rho_{k-2} \leq \frac{k-2}{2}(m-k-1)$ risulta essere

$$\theta \leq \frac{k}{2}(m-k-1).$$

Ciò è confermato anche nel seguente modo: Dall' essere $p \geq p_a$ si ricava

$$\frac{k-1}{2}(2m-2k-2) - \theta \geq \frac{k-2}{2}m + 1$$

e quindi

$$\theta \leq \frac{k}{2}(m-k-1),$$

cioè θ dev'essere al più eguale all'intero massimo contenuto in $\frac{k}{2}(m-k-1)$.

Il valore di N_{k-2} nel 1.° intervallo discende da $k(m-k-1)-2\theta$ a $(k-2)(m-k-1)$ e nel 2.° intervallo fino a zero o ad uno, secondo che il prodotto $(k-2)(m-k-1)$ è pari o dispari.

4. Ritornando al 1.° intervallo, siccome ogni gruppo dello g_k^1 vale una sola condizione per le C^{m-k-1} che lo contengono, deve essere

$$\text{(a)} \qquad N_{k-2} = kR_{k-2} + \sigma$$

dove σ rappresenta un numero di punti fissi, come si è constatato negli esempi precedenti. Dal confronto dei due valori di N_{k-2}

$$k(m-k-1-\theta) + \sigma = k(m-k-1) - 2\theta$$

si ha

$$\sigma = (k-2)\theta.$$

Quindi, per questa famiglia di curve k-gonali, *la minima serie canonica presenta* $(k-2)\theta$ *punti fissi.*

In particolare, per $k=2$, si conferma che non vi sono punti fissi nella 1.ª serie canonica; per $k=3$ i punti fissi sono θ, cioè uno per ogni punto doppio di cui aumenta la curva di genere p_a.

Ciò per le curve trigonali era stato assodato da Bohek [1]).

5. *Inviluppi.* Consideriamo dapprima che la serie g_k^1 sia segata sulle C_p^m da curve agg. non minime e quindi a gruppi G_k non collineari. Proiettiamo la g_k^1 da un punto O del piano della curva e nel fascio (O) che ri-

[1]) Bohek, *Ueber Dreischoarcurven*, § 2 del Sitzber: K. Acad. Wien, 1885.

sulta stabiliamo una corrispondenza in cui siano omologhi due raggi che proiettino due punti dello stesso gruppo G_k.

Ad ogni raggio di (O) (poichè sega la curva in m punti) corrispondono $(k-1)m$ raggi, quindi la corrispondenza, che è razionale e simmetrica, è di indice $(k-1)m$ e perciò ha $2(k-1)m$ coincidenze. Ogni raggio, che congiunge due punti del gruppo e passa per O, costituisce una di queste coincidenze e conta per due, e se in tutto sono s le cogiungenti che passano per O, si hanno da ciò $2s$ coincidenze.

Ogni raggio che passa per un punto di diramazione della g_k^1 è anche un raggio delle coincidenze e siccome è noto che la g_k^1 ha $\omega = 2p+2k-2$ punti di diramazione, questi rappresentano altrettante coincidenze. Vediamo che cosa avviene per ogni punto doppio o multiplo della C_p^m. Per ogni punto doppio la curva agg. che sega la g_k^1 vi passa semplicemente e se vi passa tangente ad un ramo non lo è all'altro e quindi in un punto doppio non vi sono due punti coincidenti di un gruppo; se però il punto doppio è cuspide la curva agg. che vi passa, tangente o non ad un ramo, passa sempre per due punti consecutivi della curva ed il raggio del fascio (O) che passa per esso è una coincidenza, ma esso è già considerato fra i raggi che passano per i punti di diramazione della g_k^1: egualmente si conchiude per i punti multipli. Abbiamo dunque

$$2s+\omega = 2(k-1)m$$
$$2s+2p+2k-2 = 2(k-1)m$$
$$s = (k-1)m-p-k-1 = (k-1)(m-1)-p$$

che è la formola di RIEMANN riguardante le coppie comuni ad una g_m^1 ed una g_k^1, quelle appunto proiettate dal punto O. Dunque:

La classe dell'inviluppo Γ *delle rette che congiungono due a due i punti di ogni gruppo* G_k *della* g_k^1 *esistente sulla* C_p^m *è in generale*

$$s = (k-1)(m-1)-p.$$

Se la curva C_p^m ha curve agg. minime C^{m-k-1} il suo genere è

$$p = \frac{k-1}{2}(2m-k-2)-0$$

e quindi per essa la classe dell'inviluppo diverrebbe

$$s = \frac{k(k-1)}{2}+0\ ;$$

ma i gruppi della g_k^1 sono collineari e quindi ogni retta dello inviluppo che passa per O conta per $\frac{k(k-1)}{2}$ coincidenze, perciò l'inviluppo si riduce ad essere di classe

$$s = 1 + \frac{2\theta}{k(k-1)}$$

e, poichè s deve essere intero, deve essere

$$\theta = \frac{k(k-1)}{2} t \qquad (t \text{ intero positivo o nullo})$$

ove per il limite assegnato a θ deve essere

$$t \leq \frac{m-k-1}{k-1}.$$

In conclusione la classe dell'inviluppo si riduce ad essere

$$s = 1 + t \qquad \text{con} \qquad s \leq \frac{m-2}{k-1}$$

e il genere della curva può assumere soltanto i valori

$$p = \frac{k-1}{2}(2m-k-2) - \frac{k(k-1)}{2} t = \frac{k-1}{2}(2m-ks-2)$$

se l'inviluppo è irreducibile.

Possiamo dunque riconfermare il teorema, già espresso dal 1893 [1]).

---

[1]) Amodeo. *Curve* k-*gonali* l. c., p. 11. La questione dell'inviluppo fu iniziata da Küpper e da Bohek per le curve *trigonali* nel 1889 giungendo separatamente a risultati discordanti. Noi la risolvemmo nel 1893 per curve k-gonali e l'applicammo nel 1895 a costruire le curve k-gonali di 2ª specie con costruzioni piane. Il nostro risultato fu confermato da Küpper nel 1895, e se ne avvalse per costruire alcune curve k-gonali di 2ª specie con costruzioni speciali dello S_3.

Le curve C^m k-*gonali provviste di curve agg. minime* C^{m-k-1} *per le quali l'inviluppo delle rette che segano la* g_k^1 *è irreducibile debbono essere di genere*

$$p = \frac{k-1}{2}(2m-k-2) - \frac{k(k-1)}{2}t = \frac{k-1}{2}(2m-ks-2)$$

per $t = 0, 1, 2, \ldots \frac{m-k-1}{k-1}$ *e la classe dell'inviluppo è* $s = 1+t$.

Le curve k-gonali con inviluppi della g_k^1 di classe $1^a, 2^a, 3^a, \ldots s^a$ le abbiamo chiamate curve k-gonali di $1^a, 2^a, \ldots s^a$ *specie*. Le curve di 1^a specie sono quelle che abbiamo anche dette *curve k-gonali tipiche*, per le quali già dal 1893 facemmo osservare (p. 13-14 del § 6) che *ogni curva di ordine* m *dotata soltanto di un punto multiplo* V^{m-k} *è* k-*gonale tipica*, e che per ogni valore di $m \geq k+1$ vi è sempre una curva siffatta di gonalità k ed inoltre che quella di ordine minimo $C^{k+1}_{\frac{k(k-1)}{2}}$ (di genere massimo) contiene ∞^1 g_k^1 invece di una sola.

6. Le curve di specie $s=1+t$ hanno per caratteri della serie minima:

$$N_{k-2} = k(m-k-1) - k(k-1)t \qquad R_{k-2} = m-k-1-\frac{k(k-1)}{2}t$$

$$N_{k-2} = kR_{k-2} + \sigma$$

$$\sigma = \frac{k(k-1)(k-2)}{2}t.$$

Da ciò il teorema enunciato nel § 5 n. 3 si completa dicendo:

Le curve k-*gonali per le quali la serie minima non presenta punti fissi sono: le curve unicursali, le curve iperellittiche e le curve* k-*gonali tipiche.*

§ **6.** *Quadri delle curve* k-*gonali. Curve piane normali di gonalità* k.

1. Riprendiamo il valore di p delle curve k-gonali provviste di curve agg. minime,

$$p = \frac{k-1}{2}(2m-k-2) - \theta \geq \frac{k-2}{2}m + 1$$

e partendo dalle curve k-gonali tipiche supponiamo che si conservi i

punto V^{m-k} di moltiplicità $m-k$ e che gli altri θ punti doppi si aggiungano a questo per far raggiungere alla C^m il genere p, e che siano disposti in modo che mai due di essi siano allineati con V.

Tralasciamo per ora il caso ovvio di $k=1$.

2. Per $k=2$ (curve iperellittiche) si ha

$$p = m-2-\theta \geq 1 \quad ; \quad m \geq 3+\theta$$

e quindi dando ad m i valori 3, 4, 5,... e successivamente a θ i valori 0, 1, 2... queste curve si possono riunire nel seguente quadro:

C_1^3 C_2^4 C_3^5 C_4^6 C_5^7 C_6^8 C_7^9 C_8^{10} C_9^{11}... con 1 punto V^{m-2}

C_1^4 C_2^5 C_3^6 C_4^7 C_5^8 C_6^9 C_7^{10} C_8^{11}..... » 1 p. V e 1 p. D

C_1^5 C_2^6 C_3^7 C_4^8 C_5^9 C_6^{10} C_7^{11} C_8^{12}... » 1 p. V e 2 p. D

C_1^6 C_2^7 C_3^8 C_4^9 C_5^{10} C_6^{11} C_7^{12}..... » 1 p. V e 3 p. D

C_1^7 C_2^8 C_3^9 C_4^{10} C_5^{11} C_6^{12} C_7^{13}... » 1 p. V e 4 p. D

ecc. ecc.

Si noti che nella prima fila orizzontale sono rappresentate le curve di tutti i generi a cominciare dal genere uno in sopra; inoltre che la prima fila obbliqua a sinistra indica tutte le curve ellittiche con $\infty^{m-2}\, g_2^1$, la seconda fila ad essa parallela indica tutte le curve iperellittiche di genere 2 con 1 sola g_2^1, ecc, ecc.

3. Per $h=3$ *(curve trigonali)* si ha

$$p = 2m-5-\theta \geq \frac{m}{2}+1 \quad , \quad m \geq 4+\frac{2}{3}\theta$$

e quindi dando come prima ad m i valori 4, 5, 6,... ed a θ i valori 1, 2, 3,... queste curve si possono riunire nel seguente quadro:

$C_3^4\ C_5^5\ C_7^6\ C_9^7\ C_{11}^8\ C_{13}^9\ C_{15}^{10}\ C_{17}^{11}\ C_{19}^{12}\ldots$ con 1 punto V^{m-3}

$C_4^5\ C_6^6\ C_8^7\ C_{10}^8\ C_{12}^9\ C_{14}^{10}\ C_{16}^{11}\ C_{18}^{12}\ldots$ » 1 p. V e 1 p. D

$C_5^6\ C_7^7\ C_9^8\ C_{11}^9\ C_{13}^{10}\ C_{15}^{11}\ C_{17}^{12}\ C_{19}^{13}\ldots$ » 1 p. V e 2 p. D

$C_6^7\ C_8^8\ C_{10}^9\ C_{12}^{10}\ C_{14}^{11}\ C_{16}^{12}\ C_{18}^{13}\ldots$ » 1 p. V e 3 p. D

$C_7^8\ C_9^9\ C_{11}^{10}\ C_{13}^{11}\ C_{15}^{12}\ C_{17}^{13}\ C_{19}^{14}\ldots$ » 1 p. V e 4 p. D

ecc. ecc.

Si noti che nelle prime due file sono rappresentate le curve di tutti i generi a cominciare dal genere 3 in sopra.

4. Per $k=4$ *(curve tetragonali)* si ha

$$p=3m-9-\theta\geq m+1 \quad , \quad m\geq 5+\frac{\theta}{2}$$

e quindi si hanno tutte le curve del seguente quadro ad eccezione della C_7^6 che vi abbiamo aggiunta:

$C_6^5\ C_9^6\ C_{12}^7\ C_{15}^8\ C_{18}^9\ C_{21}^{10}\ C_{24}^{11}\ C_{27}^{12}\ C_{30}^{13}\ldots$ con 1 punto V^{m-4}

$C_8^6\ C_{11}^7\ C_{14}^8\ C_{17}^9\ C_{20}^{10}\ C_{23}^{11}\ C_{26}^{12}\ C_{29}^{13}\ldots$ » 1 p. V e 1 p. D

$C_7^6\ C_{10}^7\ C_{13}^8\ C_{16}^9\ C_{19}^{10}\ C_{22}^{11}\ C_{25}^{12}\ C_{28}^{13}\ C_{31}^{14}\ldots$ » 1 p. V e 2 p. D

$C_{12}^8\ C_{15}^9\ C_{18}^{10}\ C_{21}^{11}\ C_{24}^{12}\ C_{27}^{13}\ C_{30}^{14}\ldots$ » 1 p. V e 3 p. D

$C_{14}^9\ C_{17}^{10}\ C_{20}^{11}\ C_{23}^{12}\ C_{26}^{13}\ C_{29}^{14}\ C_{32}^{15}\ldots$ » 1 p. V e 4 p. D

ecc. ecc.

Si noti che nelle prime tre file sono rappresentate le curve di tutti i generi da sei in sopra, per avere inclusa nella 3.ª fila la C_7^6 con 3 punti doppi come curva eccezionale (la quale è regolare se ha 3 p. indipendenti, ma è singolare se essi sono per diritto).

5. Per $k=5$ *(curve pentagonali)* si ha

$$p=4m-14-\theta\geq\frac{3m}{2}+1 \qquad \text{con} \qquad m\geq 6+\frac{2\theta}{5}$$

e si hanno le curve del seguente quadro ad eccezione delle C^7_{11} C^7_{12} C^8_{15} che vi abbiamo aggiunte:

C^6_{10} C^7_{14} C^8_{18} C^9_{22} C^{10}_{26} C^{11}_{30} C^{12}_{34} C^{13}_{38} C^{14}_{42}... con 1 punto V^{m-5}

C^7_{13} C^8_{17} C^9_{21} C^{10}_{25} C^{11}_{29} C^{12}_{33} C^{13}_{37} C^{14}_{41}... » 1 p. V e 1 p. D

C^7_{12} C^8_{16} C^9_{20} C^{10}_{24} C^{11}_{28} C^{12}_{32} C^{13}_{36} C^{14}_{40} C^{15}_{44}... » 1 p. V e 2 p. D

C^7_{11} C^8_{15} C^9_{19} C^{10}_{23} C^{11}_{27} C^{12}_{31} C^{13}_{35} C^{14}_{39} C^{15}_{43}... » 1 p. V e 3 p. D

C^{10} C^{11} C^{12} C^{13} C^{14} C^{15} C^{16}... » 1 p. V e 4 p. D

C^{11} C^{12} C^{13} C^{14} C^{15} C^{16}... » 1 p. V e 5 p. D

ecc. ecc.

Si noti che nelle prime quattro file sono rappresentati tutti i generi da 10 in sopra, per avere inclusa la curva C^7_{12} nella 3.ª fila con 3 punti doppi, e le curve C^7_{11}, C^8_{15} nella 4ª fila, la prima con 4 p. doppi indipendenti o non, e la seconda con 1 punto V e 3 punti doppi (come curve eccezionali).

6. Per $k=6$ *(curve esagonali)* si ha

$$p = 6m - 27 - 6 \geq 2m + 1 \quad \text{con} \quad m \geq 7 + \frac{5}{3}$$

e si hanno col solito modo le curve del seguente quadro ad eccezione delle C^8_{18}, C^8_{17}, C^9_{22}, C^8_{16}, C^9_{21}, C^{10}_{26} che vi abbiamo aggiunte:

C^7_{15} C^8_{20} C^9_{25} C^{10}_{30} C^{11}_{35} C^{12}_{40} C^{13}_{45} C^{14}_{50} C^{15}_{55}... con 1 punto V^{m-6}

C^8_{19} C^9_{24} C^{10}_{29} C^{11}_{34} C^{12}_{39} C^{13}_{44} C^{14}_{49} C^{15}_{54}... » 1 p. V e 1 p. D

C^8_{18} C^9_{23} C^{10}_{28} C^{11}_{33} C^{12}_{38} C^{13}_{43} C^{14}_{48} C^{15}_{53} C^{16}_{58}... » 1 p. V e 2 p. D

C^8_{17} C^9_{22} C^{10}_{27} C^{11}_{32} C^{12}_{37} C^{13}_{42} C^{14}_{47} C^{15}_{52} C^{16}_{57}... » 1 p. V e 3 p. D

C^8_{16} C^9_{21} C^{10}_{26} C^{11}_{31} C^{12}_{36} C^{13}_{41} C^{14}_{46} C^{15}_{51} C^{16}_{56}... » 1 p. V e 4 p. D

C^{12}_{35} C^{13}_{40} C^{14}_{45} C^{15}_{50} C^{16}_{55} C^{17}_{60}... » 1 p. V e 5 p. D

ecc. ecc.

Si noti che nelle prime 5 file sono rappresentati tutti i generi da 15 in sopra, per averci inclusa nella 3.ª fila la curva C^8_{18}; nella quarta fila le

curve C^{8}_{17}, $C^{9}_{\ldots}$, nella quinta fila le curve C^{8}_{16}. C^{9}_{21}, $C^{10}_{\ldots}$ (che sono eccezionali).

7. Per $k = 7$ *(curve ettagonali)* si ha

$$p = 7m - 35 - \theta \geq \frac{5m}{2} + 1 \quad \text{con} \quad m \geq 8 + \frac{20}{7}$$ e quindi il quadro:

C^{8}_{21} C^{9}_{27} C^{10}_{33} C^{11}_{39} C^{12}_{45} C^{13}_{51} C^{14}_{57} C^{15}_{63} C^{16}_{69}... con 1 p. V^{m-7}

C^{9}_{26} C^{10}_{32} C^{11}_{38} C^{12}_{44} C^{13}_{50} C^{14}_{56} C^{15}_{62} C^{16}_{69}... » 1 p. V e 1 p. D

C^{9}_{25} C^{10}_{31} C^{11}_{37} C^{12}_{43} C^{13}_{49} C^{14}_{55} C^{15}_{61} C^{16}_{67} C^{17}_{73}... » 1 p. V e 2 p. D

C^{9}_{24} C^{10}_{30} C^{11}_{36} C^{12}_{42} C^{13}_{48} C^{14}_{54} C^{15}_{60} C^{16}_{66} C^{17}_{72}... » 1 p. V e 3 p. D

C^{9}_{23} C^{10}_{29} C^{11}_{35} C^{12}_{41} C^{13}_{47} C^{14}_{53} C^{15}_{59} C^{16}_{65} C^{17}_{71} C^{18}_{77} » 1 p. V e 4 p. D

C^{9}_{22} C^{10}_{28} C^{11}_{34} C^{12}_{40} C^{13}_{46} C^{14}_{52} C^{15}_{58} C^{16}_{64} C^{17}_{70} C^{18}_{76}... » 1 p. V e 5 p. D

C^{14}_{51} C^{15}_{57} C^{16}_{63} C^{17}_{69} C^{18}_{75} C^{19}_{81} » 1 p. V e 6 p. D

ecc. ecc.

E qui è da notarsi come nei quadri precedenti che nelle prime 6 file sono rappresentati tutti i generi da 21 in sopra, se si aggiungono dalla 3.ª fila in giù le curve segnate a sinistra della linea obbliqua che passa per C^{8}_{21}, le quali sono curve eccezionali.

Si può così continuare per $k = 8, 9, \ldots$ e si trovano aumentati ogni volta i casi delle curve eccezionali da includere per ottenere che siano rappresentati tutti i generi da $\frac{k(k-1)}{2}$ in sopra.

8. La sola constatazione che nelle prime $k-1$ file di ciascun quadro delle curve di una determinata gonalità k sono rappresentate tutte le curve di quella gonalità dal minimo genere possibile in sopra e che non vi possono esserne altre di genere minore ci autorizza a dire che le curve segnate in carattere *grassetto* sono le *curve piane normali di quella gonalità.*

Ci proponiamo di dimostrare che queste curve si possono rappresentare con una formula sola, che ne determina l'ordine in base al genere (n. 9); che le curve eccezionali possono rientrare in questa formula (n. 10-15); che ogni curva di ciascun quadro è curva normale piana anche nel senso che non è proiezione di altra curva di spazio superiore e in seguito se ogni curva del quadro si possa trasformare birazionalmente in una curva normale.

9. Le curve della prima fila di ciascun quadro sono curve k-gonali tipiche, quindi il genere

$$p = \frac{k-1}{2}(2m-k-2) = (k-1)m - \frac{(k-1)(k+2)}{2} \quad , \quad \text{l'ordine } m \geq k+1$$

come risulta dal valore di $R = m-k-1 \geq 0$ (cfr. n. 2).

Poniamo l'ordine $m = i+2$, con $i \geq k-1$ e allora sarà

$$p = (k-1)(i+2) - \frac{(k-1)(k+2)}{2} = (k-1)i - \frac{(k-2)(k-1)}{2} .$$

Per tutte le altre file (se non si tien conto delle curve eccezionali) il genere è dato da

$$p = (k-1)m - \frac{(k-1)(k+2)}{2} - \theta \quad , \quad m \geq (k+1)+\theta$$

e ponendo $m = i+2$, con $i \geq (k-1)+\theta$, si ha per $m = i+2+\theta$

$$\begin{aligned} p &= (k-1)(i+2+\theta) - \frac{(k-1)(k+2)}{2} - \theta \\ &= (k-1)(i+\theta) - \frac{(k-2)(k-1)}{2} - \theta \\ &= (k-1)i - \frac{(k-2)(k-1-2\theta)}{2} = (k-1)i + \frac{(k-2)(1+2\theta-k)}{2} \end{aligned}$$

e per i valori di $\theta = 1, 2, 3 \ldots$ si ha rispettivamente

$$p = (k-1)i - \frac{(k-2)(k-3)}{2}, \quad (k-1)i - \frac{(k-2)(k-5)}{2}, \text{ ecc. ecc., } \ldots,$$

$$\ldots, \quad (k-1)i + \frac{(k-2)(k-5)}{2}, \quad (k-1)i + \frac{(k-2)(k-3)}{2} .$$

Dunque con la esclusione delle curve eccezionali possiamo enunciare il seguente [1])

Teorema: *Le curve algebriche piane* C_p^m *singolari nel loro ordine, di*

---

[1]) Questo teorema è stato annunziato fin dal 20 novembre 1939 nel Bollettino dell'Accademia Gioenia di Catania, con la Nota: AMODEO, *Curve normali piane di gonalità k.*

gonalità k (positivo) *di qualunque genere compatibile con la gonalità* $\left(\text{quindi} \geq \frac{k(k-1)}{2}\right)$ *hanno per curve normali* (di minimo ordine) *quelle indicate dai seguenti tipi:*

1.° tipo *curve di ordine* $i+2$ *e genere* $(k-1)i - \frac{(k-2)(k-1)}{2}$

2.° tipo » » » $i+3$ » » $(k-1)i - \frac{(k-2)(k-3)}{2}$

3.° tipo » » » $i+4$ » » $(k-1)i - \frac{(k-2)(k-5)}{2}$

. . . . . .

$(k-2)^0$ tipo » » » $i+k-1$ » » $(k-1)i + \frac{(k-2)(k-5)}{2}$

$(k-1)^0$ tipo » » » $i+k$ » » $(k-1)i + \frac{(k-2)(k-3)}{2}$

ove si ponga per ciascun tipo successivamente $i = k-1,\ k,\ k+1, \ldots$.

Le curve del 1.° tipo posseggono un punto V $(m-k)$*-uplo*

» » » *2.° tipo* » » » V e 1 punto D

» » » *3.° tipo* » » » V e 2 punti D

. . . . . .

» » » *$(k-1)^0$ tipo* » » » V e $(k-2)$ punti D.

Due punti doppi D non sono allineati con V.

10. Anche le curve eccezionali possono rientrare nello enunciato del teorema precedente con una lieve modifica al valore da assegnare ad i.

Questo mostrereremo esaminando più attentemente le curve di ciascun quadro cominciando da $k=1$, e si vedrà che le eccezioni che si presentano sono appunto le cause che hanno intralciato finora il progresso di questa teoria.

Per $k=1$ si hanno le *curve razionali* (unicursali)

$$C_0^2\ C_0^3\ C_0^4\ C_0^5\ C_0^6\ C_0^7 \ldots \text{ con un punto } V\ (m-1)\text{-uplo},$$

le quali, come si sa, sono riferibili tutte birazionalmente fra loro ed alla C_0^1 che si può aggiungere alle altre facendo $i=-1$.

Queste curve C_0^m hanno come curve agg. minime le C^{m-3} che segano la serie minima g_{m-2}^{m-2} ed hanno anche C^{m-1} agg. che segano una serie $g_{2(m-1)}^{2\cdot m-1)}$.

Dalla serie minima g_{m-2}^{m-2} risulta che queste curve hanno $\infty^{m-3}\ g_1^1$ a partire dalla C_0^3 che ne ha una sola, ed eccezione fatta della C_0^2 che ne ha ∞^1 segate da fasci di rette coi centri nei punti della curva [1]).

[1]) Per quanto abbiamo detto nella nota del n. 6 del § 1 non possiamo dire che le C_0^2 hanno $\infty^2\ g_2^1$, come qualche autore dice, poichè le g_2^1 segate sulla C_0^2 dai fasci di raggi coi centri nei punti del piano della curva, ma fuori di essa, non sono *complete*.

11. Per $k=2$ le *curve bigonali normali piane* sono rappresentate dal tipo C_i^{i+2} per $i \geq 2$, con 1 punto V i-uplo, cioè dalle curve

$$C_1^3 \quad C_2^4 \quad C_3^5 \quad C_4^6 \quad C_5^7 \ldots\ldots \text{ con 1 punto } V^{m-2}$$

(teorema di CREMONA, 1869).

Queste curve, fatta eccezione della C_1^3, hanno, per curve agg. minime le C^{m-3} spezzate in $m-3$ rette che segano una $g^{i-1}_{2(i-1)}$ (1ª serie canonica) composta mediante le coppie delle g_2^1 segata dalle rette del fascio (V). Nella C_1^3 le ∞^1 g_2^1 sono segate dai fasci di raggi individuati dai singoli punti della curva.

12. Per $k=3$ le *curve piane trigonali normali* sono rappresentate dai simboli (per $i \geq 2$),

C^{i+2}_{2i-1} con 1 punto V^{i-1} ; C^{i+3}_{2i} con 1 punto V^i e un punto D:

e sono le curve

$$C_3^4 \quad C_5^5 \quad C_7^6 \quad C_9^7 \quad C_{11}^8 \quad C_{13}^9 \quad C_{15}^{10} \quad C_{17}^{11} \ldots \text{ con 1 punto } V^{m-3}$$

$$C_4^5 \quad C_6^6 \quad C_8^7 \quad C_{10}^8 \quad C_{12}^9 \quad C_{14}^{10} \quad C_{16}^{11} \ldots \quad \text{» 1 p. } V \text{ e 1 p. } D.$$

(teorema già enunciato da noi nel 1900, cfr. § 1, n. 5).

Esse hanno per curve agg. minime le $C^{m-4} = C^{i-2}$ spezzate in $m-4=i-2$ rette passanti per il loro punto V e segano su quella del 1.° tipo la 2.ª serie canonica $g^{m-4}_{3(m-4)} = g^{i-2}_{3(i-2)}$ composta di terne della g_3^1 segata dal fascio di rette di centro V e segano nelle altre del secondo tipo la serie canonica $g^{m-5}_{3m-14} = g^{m-5}_{3(m-5)} + g_1^0$.

Fanno eccezione la curva C_3^4 che ha ∞^1 g_3^1, e la curva C_4^5 che ha 2 sole g_3^1 residue l'una dell'altra rispetto alla 1.ª serie canonica segata dalle C^3 agg. già precedentemente considerate.

La curva C_3^4 eccezionale è anche normale per tutte le C_3^m regolari nel loro ordine che posseggono ∞^1 g_3^1 segate da C^{m-3} agg.

13. Per $k=4$ le *curve tetragonali normali piane* sono rappresentate dai simboli (per $i \geq 3$)

C^{i+3}_{3i-3} con 1 punto V^{i-2} , C^{i+3}_{3i-1} con 1 punto V^{i-1} e 1 p. D

C^{i+3}_{3i+1} con 1 p. V^i e 2 p. doppi D.

e sono quelle in carattere grassetto delle prime tre file del quadro del n. 4, con la eccezione della C_7^6 che si ottiene dalla C_{3i+1}^{i+4} ponendo eccezionalmente $i=2$.

Queste curve hanno per curve agg. minime le C^{m-5} spezzate in $m-5$ rette passanti per V e segano la 3.ª serie canonica che rispettivamente è rappresentata da

$$g_{4(m-5)}^{m-5}\ ,\qquad g_{4m-22}^{m-6}=g_{4(m-6)}^{m-6}+g_2^0\ ,\qquad g_{4m-24}^{m-7}=g_{4(m-7)}^{m-7}+2g_2^0\ .$$

Fanno eccezione la C_6^5 regolare con ∞^1 g_4^1; la C_8^6 con 2 punti doppi che ha $2\,g_4^1$ residue l'una dell'altra rispetto alla 2.ª serie canonica segata dalle C^2 agg.; e la C_7^6 con 3 g_4^1 siano o no i suoi 3 punti doppi per diritto (questa però diventa *trigonale tipica* se i 3 punti doppi si riuniscono in un punto triplo).

Per completare il numero delle curve piane normali tetragonali bisogna aggiungere le tetragonali regolari (§ 2, n. 2) cioè la normale C_4^5 per rispetto a tutte le C_4^m regolari che hanno ∞^2 g_4^1 segate da C^{m-3} agg.; la C_6^6 regolare con 1 sola g_4^1 segata dal fascio di coniche individuato dai suoi 4 punti doppi (non tenendo conto nel senso abeliano delle quattro altre g_4^1 segate dai fasci di rette che passano per i suoi quattro punti doppi).

14. Per $k=5$ le *carve pentagonali normali piane* sono rappresentate dai simboli (per $i\geq 4$)

C_{4i-6}^{i+2} con 1 punto V^{i-3}, $\qquad$ C_{4i-3}^{i+3} con 1 punto V^{i-1} e 1 p. D

C_{4i}^{i+4} » 1 » V^{i-1} e 2 p. D, $\qquad$ C_{4i+3}^{i+5} » 1 » V^i e 3 p. D

fatta eccezione per le curve a sinistra dello allineamento obbliquo che parte dalla C_{10}^6 del quadro relativo del n. 5; cioè della C_{12}^7 che si ottiene dal terzo tipo ponendo $i=3$, e delle C_{11}^7, C_{15}^8 che si ottengono dal 4.° tipo ponendo $i=2,\ 3$.

Tutte queste curve hanno per curve aggiunte minime le C^{m-6} spezzate in $m-6$ rette passanti per V e segano la 4.ª serie canonica, che è rispettivamente rappresentata da

$$g_{5(m-6)}^{m-6}\ ,\qquad g_{5m-32}^{m-7}=g_{5(m-7)}^{m-7}+g_3^0\ ,\qquad g_{5m-34}^{m-8}=g_{5(m-8)}^{m-8}+2g_3^0$$

$$g_{5m-36}^{m-9}=g_{5(m-9)}^{m-9}+3g_3^0\ .$$

Fanno al solito eccezioni la C_{10}^6 regolare con $\infty^1 g_5^1$; la C_{13}^7 con 2 punti doppi che ha $2\, g_5^1$ residue al solito fra loro; la C_{12}^7 con 3 g_5^1 siano o non i suoi 3 punti doppi per diritto, la C_{11}^7 siano o non per diritto i suoi 4 p. doppi.

A queste, per completare il numero delle curve normali pentagonali, bisogna aggiungere la curva normale regolare C_5^6 di minimo ordine rispetto a tutte le C_5^m con ∞^3 g_5^1 segate da C^{m-3} agg., la C_7^6 con ∞^1 g_5^1 segate da C^{m-4} agg.; le C_7^7 con una g_5^1 segata da C^{m-4} agg.

15. Per $k=6$ le curve *esagonali normali piane* sono rappresentate dai simboli (per $i \geq 5$)

$$C_{5i-10}^{i+3} \text{ con 1 p. } V^{i-4} \quad ; \quad C_{5i-6}^{i+3} \text{ con 1 p. } V^{i-3} \text{ e 1 p. } D$$

$$C_{5i-2}^{i+4} \text{ » 1 p. } V^{i-2} \text{ e 2 p. } D \quad ; \quad C_{5i+2}^{i+5} \text{ » 1 p. } V^{i-1} \text{ e 3 p. } D$$

$$C_{5i+6}^{i+6} \text{ » 1 p. } V^{i} \text{ e 4 p. } D$$

con le solite eccezioni delle curve a sinistra dello allineamento obbliquo che parte dalla C_{15}^7 del quadro del n. 6: la C_{18}^8 che si otterrà dal 3.° tipo per $i=4$; le C_{17}^8, C_{22}^9 che si ottengono dal 4.° tipo per $i=3, 4$; le C_{16}^8, C_{21}^9, C_{26}^{10} che si ottengono dal 6.° tipo per $i=2, 3, 4$.

Queste curve hanno per curve agg. minime le C^{m-7} spezzate in $m-7$ rette che passano per V e segano la 5.ª serie canonica che è rappresentata rispettivamente da

$$g_{6(m-7)}^{m-7} \quad ; \quad g_{6m-44}^{m-8} = g_{6(m-8)}^{m-8} + g_5^0 \quad ; \quad g_{6m-46}^{m-9} = g_{6(m-9)}^{m-9} + 2\, g_5^0$$

$$g_{6m-48}^{m-10} = g_{6(m-10)}^{m-10} + 3 g_5^0 \quad ; \quad g_{6m-50}^{m-11} = g_{6(m-11)}^{m-11} + 4 g_5^0 .$$

Vi sono le solite eccezioni e i soliti completamenti da fare con le curve regolari: C_6^7 di minimo ordine fra le C_6^m con ∞^1 g_6^1 ; C_8^7 con ∞^1 g_6^1 ; C_8^9 con 1 g_6^1 ; C_8^6 con ∞^2 g_6^1.

16. Questa esposizione conferma quanto dicemmo nella prefazione della 1.ª Nota *(Nuovo metodo)*, [1]) che non è il *genere* delle curve (carattere *topologico* e quindi di un gruppo di trasformazioni più largo [2])) che carat-

---

[1]) Cfr. nota [2]) del n. 1 del § 2.

[2]) Cfr. la classifica dei gruppi di trasformazione fatta nel Cap. 17 p. 118-136 dell'Opera Amodeo. *Origine e sviluppo della Geometria proiettiva.*

terizza maggiormente le curve e dona ad esse un carattere di maggiore particolarità, ma è la *gonalità*, la quale a sua volta dipende dal modo come le singolarità delle curve piane sono distribuite nel piano, cioè dalla dipendenza che i punti doppi, a cui le singolarità equivalgono, hanno fra loro e dal modo diverso di aggruppamenti in punti multipli di multiplicità maggiore di 2.

Queste due qualità contribuiscono alla esistenza di certe serie piuttosto che di altre e, siccome la esistenza di queste serie è proprietà invariantiva per trasformazioni birazionali, questi caratteri sono anch' essi invariantivi.

17. Che queste curve piane normali non siano proiezione di altre curve di spazio superiore lo mostreremo in altra Nota, con la quale faremo vedere se e quando le curve piane normali di gonalità maggiore di 3 si trasformano birazionalmente o in curve dello stesso ordine o in curve di ordine maggiore, e viceversa, e se ogni curva k-gonale di qualunque ordine si può trasformare birazionalmente in curva normale.

Qui ci limitiamo a mostrare che per $k=1$, trasformando una curva C_0^m con 1 punto V $(m-1)$-uplo, mediante una trasformazione quadratica di cui i punti fondamentali siano A, B, C , A', B', C', col porre il punto V in un punto fondamentale A, e facendola passare semplicemente per B e C, questa si trasforma in una curva di ordine $m'=m-1$ con un punto V $(m'-1)$-uplo che non passa per B', C'. Quindi ripetutamente applicando la trasformazione la C_0^m si può trasformare in una retta.

Per $k=2$, applicando alla curva C_i^{i+3} con V i-uplo la detta trasformazione quadratica ponendo V in A facendo passare la curva semplicemente per B e C, questa si trasforma in una curva dello stesso ordine e qualità. Mentre se la detta curva non si fa passare per B e C, si trasforma in una curva di ordine $i+4$ con 2 punti doppi, cioè in una curva bigonale della 3.ª fila (vedi quadro n. 2). Se invece la stessa curva si fa passare per B e per C essa si trasforma in una curva di ordine $i+3$ con un punto doppio in B' e uno semplice in C', cioè si trasforma in una curva della 2.ª fila del detto quadro.

Viceversa, da qualunque curva bigonale del quadro suddetto si può passare gradatamente ad una curva bigonale senza punti doppi e quindi alla bigonale normale di quel genere.

Si può invece seguire quanto ha detto Cremona nella Mem. citata (§ 1, n. 2) e passare con una trasformazione di de Jonquières da una qualunque curva del quadro ad una della 1ª fila.

Per $h=3$, applicando alle curve C_{2i-1}^{i+2} con 1 p. V^{i-1} la detta trasformazione quadratica, ponendo il punto V nel punto fondamentale A e facendo passare la curva per gli altri punti fondamentali B e C, si ha per

trasformata una curva di ordine $m' = i + 3$ con 1 punto V^i e due punti doppi, cioè in una curva, di egual genere, della 3.ª fila del quadro del n. 3.

Viceversa, da una curva della 3.ª fila si passa con la trasformazione inversa ad una curva della 1.ª fila (*normale* del 1.° tipo) e da qualunque curva con numero pari di punti doppi si passa con ripetute trasformazioni ad una curva provvista solo del punto multiplo. Applicando la stessa trasformazione quadratica ad una curva trigonale del 2.° tipo

$$C_{2i}^{i+3} \text{ con 1 p. } V^i \text{ e 1 p. doppio}$$

se poniamo V in A il punto doppio in B, e si fa passare la curva semplicemente per C la curva si trasforma in altra di ordine eguale con 1 p. V^i e 1 p. doppio, cioè in una curva dello stesso tipo. Ma se passiamo il punto V^i in A e due punti semplici in B e C la curva si trasforma in un'altra di ordine $m' = i + 4$, con un punto $V'(i+1)$-uplo e due punti doppi in B' e C', quindi in tutto con 3 punti doppi, cioè si trasforma in una curva della 4.ª fila del quadro.

Viceversa, da una curva della 4.ª, 6.ª, 8.ª ... fila del quadro can un numero dispari di punti doppi, si passa con ripetute trasformazioni ad una curva del 2.° tipo.

Cosicché ogni curva trigonale del quadro suddetto si può trasformare birazionalmente in una curva normale del 1.° tipo o del 2.° tipo a seconda il suo genere sia dispari o pari.

Sulla costituzione dei tufi bianchi della Solfatara di Pozzuoli, e di materiali geneticamente simili provenienti dall'isola d'Ischia

Nota del dott. **Vittorio Cirilli**, *presentata dal socio* **G. Malquori**

(Adunanza del dì 4 gennaio 1941 - XIX)

Sunto. — Sono stati sottoposti ad indagini chimiche, termiche e röntgenografiche, alcuni materiali provenienti dal versante settentrionale della Solfatara di Pozzuoli e dalla regione nord-orientale dell'isola d'Ischia. L'insieme dei risultati ottenuti dimostra che i primi sono costituiti per la massima parte da silice amorfa e da alunite, e contengono altresì solfati solubili, mentre i secondi sono da ritenersi dei miscugli complessi di silice amorfa, caolino, alunite, sanidino inalterato e piccole quantità di pirite e di solfati solubili di $Al^{\cdots}$, $Fe^{\cdot\cdot}$, $Fe^{\cdots}$.

I materiali che sono oggetto delle indagini sulle quali riferisco nella nota presente provengono: parte da cave in esercizio in località « Pisciarelli », sul versante settentrionale della Solfatara, parte dalla regione nord-orientale dell'isola d'Ischia; si trovano succintamente descritti nella « Relazione sul servizio minerario e statistica delle industrie estrattive in Italia nel 1936 » [1]), che classifica i primi come « tufi bianchi ad alto tenore di sostanza caolinica » i secondi come « minerale caolinico ».

Ho pertanto voluto esaminare diffusamente la loro costituzione, e li ho per questo sottoposti alle indagini chimico-fisiche ritenute più adatte a svelare la natura dei costituenti mineralogici delle argille.

Materiali della Solfatara.

Le analisi sono riportate nella Tab. I.

Tabella I

		1	2	3
Perdita al fuoco	%	31,30	22,48	28,41
SiO_2	»	24,27	53,51	39,47
$Al_2O_3 + TiO_2$	»	26,86	17,06	15,91
Fe_2O_3	»	0,48	0,31	5,27
CaO	»	—	—	—
MgO	»	0,60	tr.	tr.
$Na_2O + K_2O$	»	8,88	3,70	4,96
Perdita a 120°	»	1,71	3,20	2,73
SO_3	»	27,13	12,42	21,14
Refrattarietà C. S.		17 ÷ 19	19 ÷ 20	13 ÷ 14

[1]) pagg. 283, 284. Roma, 1939.

Nella tavola II sono riprodotte le curve: perdita di peso-temperatura dei tre campioni esaminati.

Nella tavola I è riportato lo spettro del campione N. 1 e quello di un campione di alunite della Tolfa.

Sia gli spettri, sia le curve termo-ponderali mostrano in modo evidentissimo la presenza di alunite.

Con l'analisi termica si registrano due netti effetti endotermici: il primo verso 500°, il secondo verso 760°.

Per i campioni N.ri 1 e 3 le quantità di Al_2O_3 e di SO_3 riscontrate con l'analisi concordano all'incirca con quanto si deduce in base alla formula dell'alunite. Il campione N. 2 accusa invece un contenuto di allumina superiore a quello richiesto dall'anidride solforica trovata; il rapporto fra la entità delle perdite di peso a 750° e a 550°, coincidendo con quello che spetta all'alunite, lascerebbe escludere tuttavia la presenza di un minerale siallitico e ritenere che l'eccesso di allumina derivi dalla presenza di residui indecomposti della roccia madre.

I tre campioni, polverizzati e dibattuti a lungo con acqua, mandano in soluzione discrete quantità di $Al^{\cdots}$, SO_4'', e, il campione N. 3, anche $Fe^{\cdots}$.

Debbo pertanto concludere che i tufi leggeri, friabili, bianchi o rosati, provenienti dal versante settentrionale della Solfatara, sono fondamentalmente costituiti da miscugli di silice amorfa e di alunite, e per quanto non abbia avuto possibilità di procedere ad un esteso campionamento della zona, debbo ritenere che tale costituzione sia comune a gran parte dei materiali bianchi risultanti dalla solfatazione profonda delle locali formazioni alcalitrachitiche per effetto delle emanazioni solfatariche.

Dell'alunite non è fatto menzione nè da A. Rittmann, in uno studio dettagliato sull'alterazione fumarolica delle alcalitrachiti della Solfatara [1]), nè da O. Rebuffat [2]) in un lavoro sulla composizione chimica del «bianchetto», materiale che l'A. ritiene costituito da silice amorfa e da solfato basico di alluminio.

La ricorda invece O. Bieber [3]), associata con silice amorfa, fra i prodotti dell'alterazione fumarolica delle rioliti dell'isola di Ponza.

Materiali dell'isola d'Ischia.

Si tratta di materiali sciolti, di color giallo, grigiastro o bianco sporco [4]),

[1]) *Der Alkalitrachyt der Solfatara und seine Zersetzung durch Fumarolengase.* Schweiz. Min. Petr. Mitt., *14*, 1934.

[2]) *Bianchetto della Solfatara.* Boll. Uff. della R. Stazione Sper. per le industrie della ceramica e della vetrificazione. Napoli, 1920.

[3]) *Die Ponza Inseln.* Berlino, 1924.

[4]) Nelle zone dalle quali provengono i campioni esistono delle emanazioni solfidriche.

utilizzati — come è riferito dalla su ricordata « Relazione sul servizio minerario ecc. » — dalla Soc. An. Calce e Cementi di Segni, per confezionare dei leganti pozzolanici, presso il proprio stabilimento di Castellammare di Stabia.

Le curve di riscaldamento di tutti i campioni studiati mostrano più o meno evidentemente, due effetti endotermici: il primo verso 480° ÷ 500°, ed il secondo verso 730° ÷ 750°.

Riporto qui di seguito i risultati delle loro analisi.

TABELLA II

	1	2	3	4	5	6
Perdita al fuoco %	14,23	20,11	18,86	11,67	17,38	14,57
SiO_2 »	51,63	41,04	51,11	71,01	57,65	56,10
$Al_2O_3 + TiO_2$ »	18,45	16,68	18,04	7,68	18,00	20,86
Fe_2O_3 »	6,87	2,68	3,11	5,13	0,80	3,22
CaO »	0,33	10,00	0,38	0,11	0,43	0,80
MgO »	—	0,60	0,42	0,85	tr.	tr.
$Na_2O + K_2O$ »	7,60	3,47	4,78	2,80	2,74	3,25
Perdita a 120° »	4,82	6,50	4,30	4,93	3,21	6,31
SO_3 »	11,07	10,85	10,56	2,36	9,46	2,35
Refrattarietà C. S.	6	7	17 ÷ 18	16 ÷ 17	13 ÷ 14	10

Il campione N. 1 ha colore grigio verdognolo; dibattuto con acqua lascia passare in soluzione: SO_4'', $Fe^{\cdot\cdot}$, $Fe^{\cdot\cdot\cdot}$, $Al^{\cdot\cdot\cdot}$; trattato con acido cloridrico a caldo svolge H_2S; estratto in Soxhlet con solfuro di carbonio, non cede solfo.

Nello spettro, accanto a righe deboli che coincidono con righe dello spettro dell'alunite, sono visibili le righe del caolino, della pirite, del sanidino (Tav. I).

La curva: perdita di peso-temperatura (Tav. III, N. 1) presenta tre flessi caratteristici; a circa 430°, 520°, 650°, attribuibili rispettivamente alla decomposizione della pirite il primo, alla disidratazione dell'alunite e del caolino il secondo, alla dipartita dell'anidride solforica dai solfati di alluminio e di ferro, l'ultimo.

Il materiale studiato consta quindi di un miscuglio complesso di silice amorfa, caolino, alunite, sanidino inalterato, ai quali sono associate piccole quantità di pirite (e forse di Fe S) e di solfati di alluminio e di ferro ($Fe^{\cdot\cdot}$, $Fe^{\cdot\cdot\cdot}$).

Il campione N. 2 è di colore giallo chiaro.

Il suo spettro (Tav. I) mostra le interferenze del caolino accanto a quelle dell'alunite. Il contenuto di alunite è qui assai piccolo — come è indicato dalla curva: perdita di peso-temperatura (Tav. III, N. 2) — trovan-

dosi l'anidride solforica riscontrata analiticamente, per buona parte sotto forma di solfato di calcio.

Dibattuto con acqua il campione cede infatti $Ca^{\cdot\cdot}$ e SO_4'' oltre a piccole quantità di $Al^{\cdot\cdot\cdot}$ e $Fe^{\cdot\cdot\cdot}$.

I campioni N.ri 3, 4, 5, sono biancastri e il loro spettro mostra le righe dell'alunite; (nella Tav. I è riportato lo spettro del campione N. 3).

Cedono tutti all'acqua, sebbene in misura diversa, SO_4'', $Fe^{\cdot\cdot\cdot}$, $Al^{\cdot\cdot\cdot}$. Calcinati assumono colore rosso violaceo.

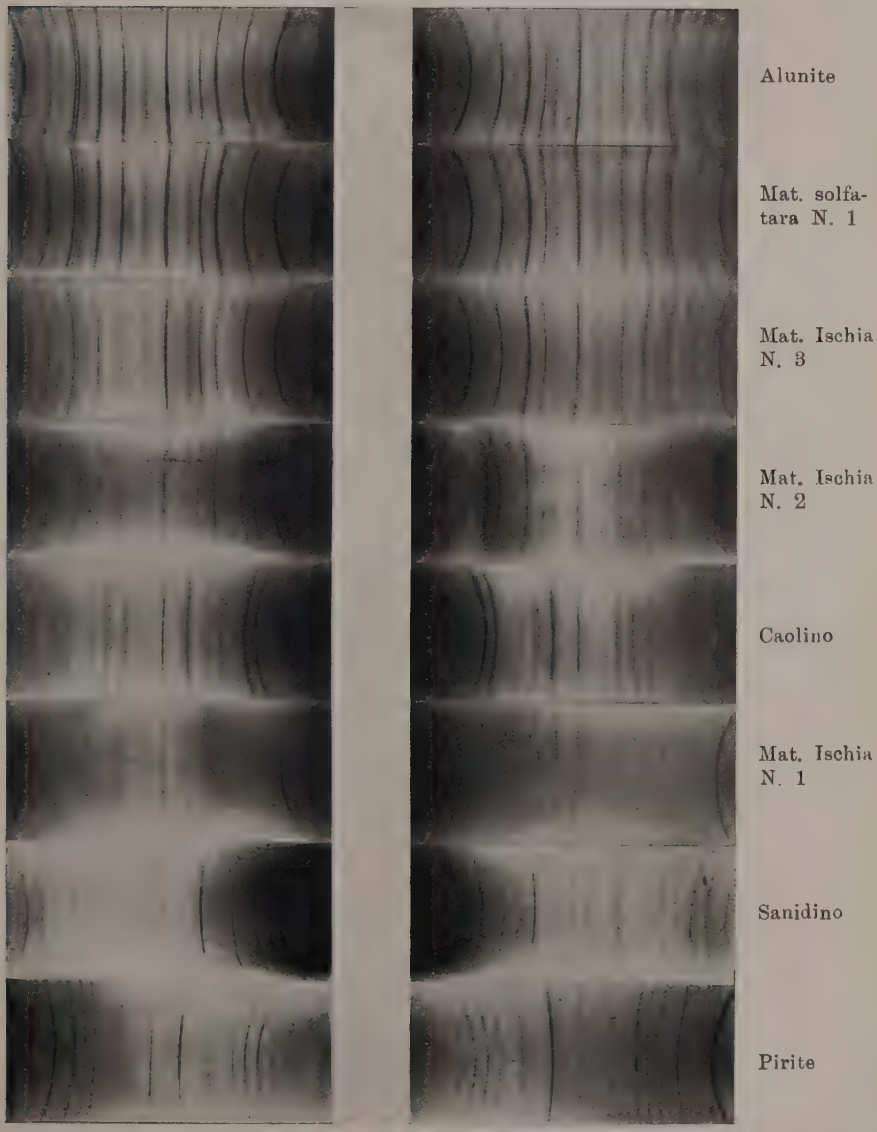
Il campione N. 6, giallo, fornisce uno spettro nel quale sono nettamente visibili le interferenze del sanidino e molto debolmente quelle del caolino e dell'alunite.

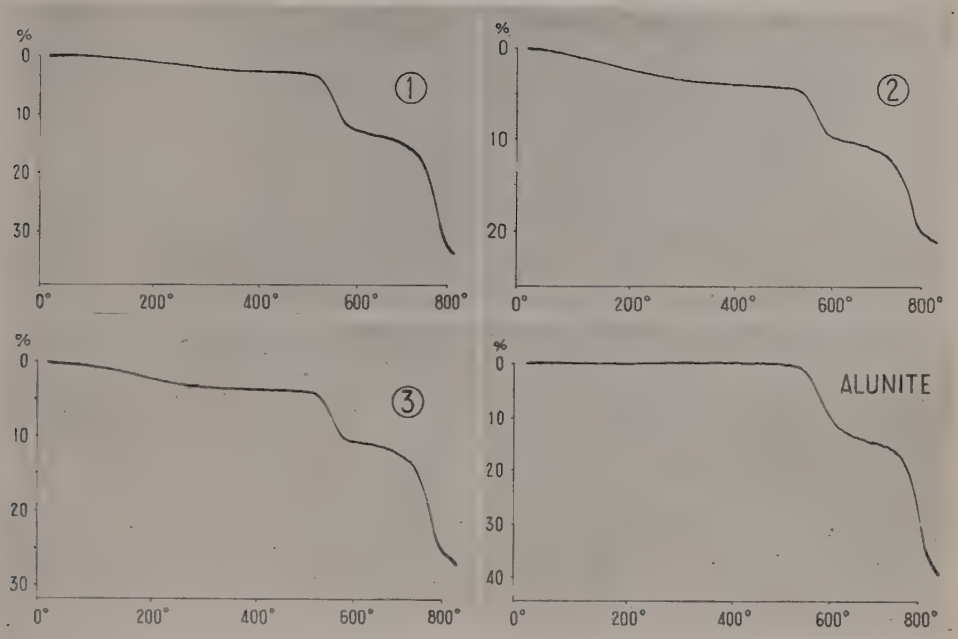
Come i precedenti, anche questo campione cede all'acqua delle piccole quantità di: SO_4'', $Fe^{\cdot\cdot\cdot}$, $Al^{\cdot\cdot\cdot}$.

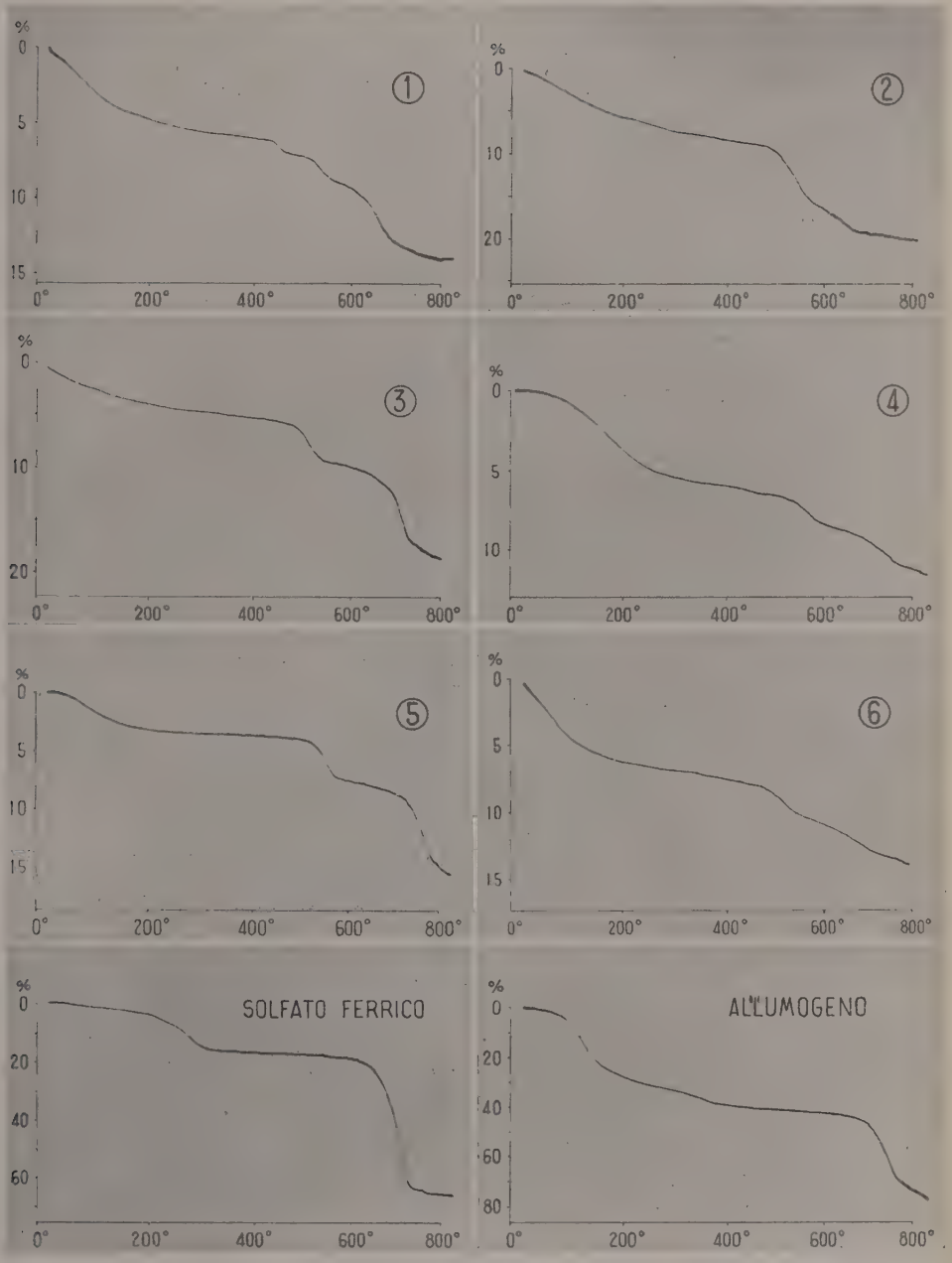
I materiali ischitani risultano pertanto costituiti da miscugli di silice amorfa, caolino, alunite, sanidino inalterato proveniente dalla roccia madre; contengono inoltre piccole quantità di solfuri (pirite) e di solfati solubili.

L'alta percentuale di silice amorfa li rende adatti a fissare, e rapidamente, dei forti quantitativi di calce da soluzioni sature di questo composto.

Seguendo al microscopio l'attacco operato dalla calce è possibile identificare fra i prodotti di neoformazione i cristalli di abito esagonale (piastre) degli alluminati calcici idrati, e i cristalli aghiformi del solfoalluminato di calcio, inglobati in una massa fondamentale gelatinosa.


Alunite
Mat. solfatara N. 1
Mat. Ischia N. 3
Mat. Ischia N. 2
Caolino
Mat. Ischia N. 1
Sanidino
Pirite


%
0
10
20
30
①
0°
200°
400°
600°
800°
%
0
10
20
②
0°
200°
400°
600°
800°
%
0
10
20
30
③
0°
200°
400°
600°
800°
%
0
10
20
30
40
ALUNITE
0°
200°
400°
600°
800°


%
0
5
10
15
①
0°
200°
400°
600°
800°
%
0
10
20
②
0°
200°
400°
600°
800°
%
0
10
20
③
0°
200°
400°
600°
800°
%
0
5
10
④
0°
200°
400°
600°
800°
%
0
5
10
15
⑤
0°
200°
400°
600°
800°
%
0
5
10
15
⑥
0°
200°
400°
600°
800°
%
0
20
40
60
SOLFATO FERRICO
0°
200°
400°
600°
800°
%
0
20
40
60
80
ALLUMOGENO
0°
200°
400°
600°
800°

Di recenti indagini sull'orecchio interno umano

Nota del socio ordinario **Vincenzo Diamare**

(Adunanza del dì 1.° febbraio 1941 - XIX)

Sunto. — L'A. riferisce su due lavori di anatomia dell'orecchio interno umano compiuti nel suo Istituto, riguardanti, l'uno (dott. V. Mesolella), un presunto ramo del nervo cocleare proveniente dal vestibolo (Böttcher) e che, invece, deve ritenersi di pertinenza del nervo vestibolare stesso; l'altro (dott. O. A. Armenio) riguarda particolari del condotto endolinfatico e sopratutto speciali e singolari formazioni birifrangenti, disposte in serie, spettanti alla meninge, ne' pressi del sacco.

Offro all'Accademia e riferisco su due lavori, compiuti nel mio Istituto, lieto di dimostrare ancora una volta che l'anatomia dell'uomo non è affatto un libro chiuso per ricercatori: questi lavori si riannodano altresì ad interessanti questioni di fisiologia.

Il lavoro del dott. Mesolella Vittorio (assistente alla Clinica otorinolaringoiatrica) dal titolo « *Sul cosidetto ramo vestibolare del cocleare e sul suo ganglio (ganglio di Böttcher). Ricerche nell'uomo* » [1]) concerne una ricerca laboriosa, con pazienza da certosino, che io gli affidai, riguardante un presunto ramo del nervo cocleare, che proverrebbe dalla porzione iniziale anche del vestibolo. Esiste infatti un ramuscolo che, traversando la quarta macula cribosa (di Reichert), offre anche alla sua origine un ganglio (Böttcher), registrato in qualche trattato e del quale si sono occupati pochi autori (Hutsaeger, Ferrè, Cannieu) confermando la natura cocleare, opinione contro la quale stanno le categoriche e positive osservazioni del Mesolella.

L'Autore ha svolto le sue ricerche su temporali umani, procedendo in due modi diversi: 1.°) Osservando al microscopio binoculare da dissezione nervi acustici in sito o staccati, per rendersi conto, con o senza sfibramento, se esistesse il ramo vestibolare del cocleare; 2.° allestendo preparati istologici da nervi in sito, dopo decalcificazione dei pezzi, e da nervi isolati, staccati cioè dal fondo del condotto uditivo interno.

Con il primo gruppo di ricerche egli ha potuto osservare che il nervo acustico, atteggiato a doccia con concavità sempre più accentuata a misura

---

[1]) Giornale dell'Associazione dei Medici e Naturalisti di Napoli (tornata del 27 giugno 1940 - XVIII).

che si approfonda nel condotto uditivo interno, a 3-4 mm. dal fondo di questo si mostra chiaramente diviso nei due tronchi distinti, cocleare e vestibolare. Proprio in fondo al condotto uditivo il ramo cocleare subisce un incurvamento in avanti, per penetrare nel modiolo, mentre il ramo vestibolare si porta lateralmente ed un poco indietro.

Ora, l'Autore potette osservare al microscopio binoculare, mediante dissezione con l'ago, che la branca vestibolare, quasi nel fondo del condotto uditivo, si divide in due rami, uno superiore, situato nello stesso piano del facciale, che si porta verso l'area vestibolare posteriore, l'altro inferiore, che si trova allo stesso livello della branca cocleare. Di questa una porzione penetra nell'area vestibolare inferiore, l'altra nel foramen singulare.

Secondo le numerose dissezioni del MESOLELLA delle fibre sembrano portarsi in direzione obliqua dal cocleare al vestibolare, *ma in realtà esse vanno dal vestibolare al cocleare, partendo dal ganglio di* SCARPA, come potette constatare anche con i preparati microscopici.

Con il secondo gruppo di ricerche l'A. rilevò, sia sui nervi sezionati in senso trasversale, che in quelli tagliati longitudinalmente, che non v'è sul tronco del cocleare, o in connessione con esso, nell'interno del condotto uditivo, nessun aggruppamento di cellule gangliari, nè tanto meno cellule isolate.

Invece interessante fu il comportamento del ganglio di SCARPA, che non si presenta come un ammasso unico e compatto di cellule, ma nelle zone periferiche, prossimali e distali, appare diviso in due e qualche volta in tre appruppamenti cellulari separati da fasci di fibre.

Quasi costantemente il ganglio comincia quando il ramo vestibolare non si è ancora staccato dal cocleare e, poichè in questi casi detto ganglio si può trovare come diviso in due blocchi cellulari, uno dei quali è in rapporto con le fibre del cocleare, questo fatto ha potuto trarre in errore i precedenti osservatori, facendo ritenere quest'ultimo gruppo di cellule come un ganglio a parte, connesso col presunto ramo del cocleare. Ma l'A. fa notare che, con un attento esame dei preparati della serie, si può rilevare che l'apparenza di due gangli non è altro che lo sdoppiamento dello stesso ganglio di SCARPA ad opera di fibre che provengono da cellule più distali o che vanno a cellule più prossimali. A conferma di questa osservazione sta anche il fatto che le cellule di questi ammassi gangliari sono simili per grandezze e per forma ed hanno la caratteristica delle cellule del ganglio di SCARPA e non di quelle del CORTI.

Infine l'A. osservò che *il fascio di fibre proveniente dal sacculo termina in un ammasso ganglionare, indipendente dal nervo cocleare, costituito da cellule grosse, che non sono che cellule del ganglio di* SCARPA.

Viene quindi alla conclusione: 1.°) *Che il presunto ramo vestibolare del cocleare non è che un filuzzo dello stesso nervo vestibolare, distinto dal grosso del nervo e che si unisce poi insieme con questo al cocleare per*

formare il nervo acustico; 2.°) *che le cellule a cui spetta sono cellule del ganglio di* Scarpa; 3.°) *che data l'identità d'innervazione e di struttura tra la macula sacculi ed utricoli si debba ritenere che questi due organi abbiano una funzione identica e propriamente quella statica*, escludendosi, come erroneo, quel dato anatomico che sembrava avvalorare una sua funzione acustica.

L'altro lavoro che offro e del quale riferisco è del dott. Oreste Attilio Armenio, assistente anche della R. Clinica Otorinolaringoiatrica, dal titolo « *Ricerche istologiche sul sacco endolinfatico dell'uomo* » [1].

Anche questa ricerca riguarda ancora il capitolo così interessante della Fisiologia umana dell'orecchio interno e propriamente la discussa funzione e la morfologia del sacco endolinfatico.

In una serie di ricerche eseguite su numerosi sacchi endolinfatici umani, ha potuto rilevare che, *contrariamente a quanto è stato affermato da alcuni Autori, esso non è occupato da otoliti, nè le sue pareti presentano zone pigmentate*. I canalicoli descritti dal Cotugno li ha trovati solo in due casi.

Nel corso delle indagini ricordate, e particolarmente in quelle eseguite per la ricerca dei canalicoli del Cotugno, *ha osservato nel tessuto perisacculare alcune particolari formazioni, sin oggi non rilevate nè descritte da altri.*

Su una sezione, colorata con ematossilina ed eosina, gli venne fatto di notare una strana formazione situata nella dura madre, vicino al sacco endolinfatico. A piccolo ingrandimento si vedeva che tale formazione, allungata, nastriforme, era composta da due bande di tessuto fortemente eosinofilo, che delimitavano un tratto centrale vuoto, molto più sottile delle due formazioni che lo fiancheggiavano. Ciascuna di esse appariva come formata da numerosi elementi rettangolari, disposti uno accanto all'altro, per il lato maggiore, con la interposizione di un sottilissimo spazio. Molti di tali elementi presentavano in tutta vicinanza di uno dei lati più lunghi, e parallelamente a questo, un nucleo allungato, lineare, intensamente colorato in bleu. A forte ingrandimento si vedeva che tali nuclei non facevano parte diretta delle formazioni, oggetto del suo studio, le quali avevano una certa somiglianza con le fibre muscolari striate, ma come tali non possono essere interpretate.

Ha ricercato su altre sezioni del medesimo pezzo le formazioni e le ha ritrovate, in numero variabile, solo in alcuni tagli successivi. Erano completamente assenti nelle ultime sezioni. In seguito *ha eseguito dei tagli in serie di diversi sacchi endolinfatici di soggetti adulti ed ha sempre costantemente trovato le formazioni, limitatamente però ad un tratto del*

[1]) Atti della R. Clinica Otorinolaringoiatrica. Vol. XV, 1939-40.

sacco che, su per giù, corrisponde alla parte intermedia tra sbocco del dotto endolinfatico e fondo sacculare. Ugualmente, rivedendo con maggiore attenzione i numerosi preparati fatti per le ricerche di cui ha parlato innanzi, ha trovato in un buon numero di essi, le medesime strane formazioni.

Queste ultime *hanno decorso perpendicolare alla parete ossea e sono numerose nel tratto di dura madre compreso tra fossetta endolinfatica e meato acustico interno.* In numero molto minore si riscontrano nella lamina di dura madre compresa tra faccia anteriore del sacco e parete ossea. Non le ha in alcun caso vedute raggiungere il lume del sacco, nè gli è mai capitato di osservarne nel tratto di dura madre che lo ricopre o in prossimità del seno laterale. *Le formazioni, verso gli estremi, si sfioccano nel tessuto connettivo durale.*

Non essendo riuscito a formarsi un preciso concetto sulla natura del tessuto che le componeva, ha osservato al microscopio polarizzatore tali formazioni ed ha rilevato che hanno un comportamento particolarissimo: *sono rifrangenti e fortemente birefrangenti* e, con l'interposizione della lastra di gesso di 1.° ordine, nella posizione di 45° prendono il colore giallo, in quella di 135° prendono il colore bleu-azzurro. Sorpreso per il fatto di aver riscontrato una così forte birifrangenza positiva, ha voluto eliminare il dubbio che il fenomeno potesse essere causato da presenza di paraffina rimasta aderente alle sezioni, ed a tale scopo le ha trattate successivamente con xilolo, cloroformio, acetone e trementina, tenendole per 24 ore consecutive in ciascuno dei vari liquidi. La birifrangenza non si è però modificata, ciò che esclude anche la natura lipidica.

Sempre nell'intento di chiarire la natura istologica delle formazioni ha pensato di accertarsi se il fenomeno di birifrazione non dipendesse da un accumulo di sali di calcio ed ha trattato alcune sezioni con una soluzione acquosa di acido cloridrico, prima all'1 % e poi al 2 %, lasciandovele per 48 ore consecutive. In tutti i casi si è avuta anzi una esaltazione della birifrazione.

Quale interpetrazione è da dare a tali formazioni? Tutto induce a ritenere che non abbiano a che fare con le granulazioni di Pacchioni.

Volendo lasciare libero sfogo alla fantasia, molte ipotesi potrebbero avanzarsi, ma, per il momento, in attesa di completare le ulteriori ricerche che ha in corso, preferisce — ed anche è mia opinione personale — non avventare alcun giudizio, riservandosi di continuare le ricerche, per giungere ad una più esatta conoscenza e valutazione funzionale delle formazioni singolari osservate.

Sulla configurazione dei cerchi osculatori e delle sfere osculatrici.

Nota del prof. **Guido Barba**, *presentata dal socio corr.* **G. Andreoli**

(Adunanza del dì 1. marzo 1941 - XIX).

Sunto. — In questa Nota l'A. esamina la configurazione dei cerchi osculatori e delle sfere osculatrici ad una curva sghemba ritrovando, tra l'altro, sotto ipotesi meno restrittive, la corrispondente proprietà per le curve piane.

La conclusione alla quale l'A. perviene è che i cerchi osculatori ad una curva, in punti infinitamente vicini, non hanno punti reali in comune — senza peraltro, concatenarsi, nel caso di curve sghembe — mentre le sfere osculatrici si tagliano.

1. — La proprietà di due cerchi osculatori ad una curva piana in due punti infinitamente vicini di non avere punti reali in comune è poco nota. La totalità dei trattatisti, infatti, non ne fa parola, ove se ne eccettui qualche ben rara eccezione [1]). Peraltro, la proprietà in discorso vien dedotta, per via geometrica, sotto certe condizioni, dalla ben nota che l'arco di evoluta è la differenza dei due raggi di curvatura corrispondenti agli estremi.

Consegue, in base a ciò, che nulla può dirsi, ad esempio, dei cerchi osculatori alla cicloide in due punti infinitamente vicini, a sinistra ed a destra del punto di massimo di un suo arco in quanto, l'arco di sviluppata comprendente una cuspide non è uguale alla differenza dei raggi di curvatura estremi.

Si presenta, perciò, naturale la questione di indagare — ed in via del tutto analitica — sino a qual punto la predetta proprietà sussista; di esaminare, cioè, cosa possa affermarsi per una generica curva piana circa la configurazione dei suoi cerchi osculatori.

Nello stesso tempo indagheremo, in questa Nota, sulla configurazione delle sfere osculatrici e dei cerchi osculatori ad una curva sghemba, pervenendo a delle conclusioni che non ci risultano note.

Completano la ricerca alcune altre considerazioni connessi agli argomenti trattati.

---

[1]) Al punto che, alcuni anni fa, ritenevamo inedita la proprietà, nella quale ci eravamo imbattuti.

A) — *Configurazione dei cerchi osculatori ad una curva piana.*

2. — La curva L ammetta l'evoluta Γ.

Com'è ben noto, allora, la differenza fra i raggi di curvatura ρ, ρ_1, in due punti P, P_1, di una linea L è uguale alla lunghezza σ dell'arco di evoluta Γ compresa tra i corrispondenti centri di curvatura C, C_1; ossia:

$$\sigma = \rho - \rho_1$$

Ma, detta λ la distanza CC_1 è, sempre, $\lambda < \sigma$, per cui:

$$\lambda < \sigma - \sigma_1$$

e, pertanto, i due cerchi $[C, \sigma], [C_1, \sigma_1]$ sono l'uno interno all'altro.

Ne segue che i due cerchi osculatori in P e P_1 di una linea L, sono l'uno interno all'altro *sempre che:*

I) Valga la proprietà, per l'evoluta di L, che un suo arco sia la differenza dei raggi di curvatura corrispondenti agli estremi.

II) Su Γ, al crescere (decrescere) di s, cresca (decresca) ρ nel passaggio dal punto P al punto P_1 su L.

Rimuoveremo, qui, completamente, queste due restrizioni e faremo vedere che la proprietà sussiste, *di sicuro*, per due punti P e P_1 di una qualsiasi linea, purchè sufficientemente vicini.

3. — Supponiamo le coordinate x, y di un punto generico della linea espresse mediante l'arco s della linea stessa (contato a partire da un punto fisso).

Le coordinate del centro di curvatura relativo al punto P, corrispondente al valore s del parametro, sono, in tal caso:

$$\xi = x - \rho y' \quad , \quad \eta = y + \rho x'$$

I quadrati degli incrementi subiti da tali coordinate nel passaggio dal punto P (s) al punto P' $(s + ds)$, sono dati da:

$$(\Delta \beta)^2 = d\beta^2 + d\beta \cdot d^3\beta + \frac{1}{3} d\beta \cdot d^3\beta + \frac{1}{4} (d^2\beta)^2 + \ldots \quad (\beta = \xi, \eta)$$

Ne segue, pel quadrato della distanza λ tra i due centri relativi a P (s) e $P(s + ds)$:

$$(1) \qquad \lambda^2 = [\xi'^2 + \eta'^2]\, ds^2 + [\xi'\xi'' + \eta'\eta'']\, ds^3 + [4(\xi'\xi''' + \eta'\eta''')] + 3(\xi''^2 + \eta''^2)] \frac{ds^4}{12} + \ldots\ldots$$

Si ha, poi, pel divario dei raggi di curvatura nei suddetti punti:

$$(2) \qquad (\Delta\rho)^2 = \rho'^2 ds^2 + \rho\,\rho'' ds^3 + (4\rho'\rho''' + 3\rho''^2)\frac{ds^4}{12} + \ldots\ldots$$

Per quanto si ha di mira occorre paragonare (1) e (2).

Con facile calcolo, tenendo presenti i valori di ξ ed η e le note relazioni che legano le derivate delle coordinate, in parametro s, si trova pel coefficiente di ds^2 in (1), il valore ρ'^2, ed inoltre, pel coefficiente di ds^3, sempre in (1), il valore $\rho'\rho''$.

Occorre, quindi, passare al confronto dei coefficienti A, in (1) e α, in (2), di $\frac{ds^4}{12}$. Si ha, dapprima, derivando: $\xi'^2 + \eta'^2 = \rho'^2$:

$$A = 4\rho'' + 4\rho'\rho - (\xi''^2 + \eta''^2)$$

indi, con calcolo diretto dell'ultimo termine in A, tenendo presenti le relazioni:

$$a)\ x'x''' + y'y''' = -\frac{1}{\rho^2}, \qquad b)\ x'y''' - y'x''' = -\frac{\rho'}{\rho^2},$$

$$c)\ x''x''' + y''y''' = -\frac{\rho'}{\rho^3}, \quad d)\ x'''^2 + y'''^2 = \frac{1+\rho'^2}{\rho^4}, \quad e)\ x'y''' - x'''y'' = \frac{1}{\rho^3}$$

analoghe a quelle, già invocate che ricorrono nel calcolo della curvatura, con riferimento al parametro s, si ottiene:

$$A = 3\rho''^2 + 4\rho'\rho''' - \frac{\rho'^2}{\rho^2}$$

Ne segue, tenendo conto del valore di α:

$$\gamma < \Delta\rho$$

la disuguaglianza mutandosi in eguaglianza ove sia $\rho' = o$, oppure $\rho = \infty$. La proprietà è, così, stabilita.

La dimostrazione svolta presenta il vantaggio di riferirsi alle equazioni intrinseche delle curve.

Una dimostrazione più semplice, per quanto concettualmente identica, si ha assumendo quale parametro, non più l'arco s, bensì l'angolo φ che la direzione positiva della tangente alla curva in P forma con quella di un asse fisso.

Attraverso tal' ultimo procedimento si presentano delle interessanti relazioni, razionali *intere*, questa volta, tra le derivate delle coordinate

del centro di curvatura e quelle del raggio di curvatura [1]) — mentre, quelle già espresse legano, razionalmente, le derivate delle coordinate del punto della linea, con quelle del raggio di curvatura relativo a quel punto.

Implicitamente abbiamo ammesso, in quanto precede, che il raggio di curvatura non sia infinito in un intorno del punto P.

Se ρ è infinito, si ha un flesso: esso conta come un punto di massimo, agli effetti delle considerazioni che seguono, e cioè, i cerchi che precedono sono da una banda della retta di flesso, i cerchi che seguono dall'altra banda — qui «interno» ed «esterno» al cerchio osculatore, sono rimpiazzati dal trovarsi nell'uno o nell'altro dei due semipiani della retta di flesso.

4. — Sia, ora, $\rho = \rho(s)$ l'equazione intrinseca di una curva, ed s_0 un punto di massimo; ρ cresca (per semplicità) con s. Ne segue che il cerchio di raggio $\rho_0 = \rho(s_0)$, racchiude tutti i cerchi di curvatura corrispondenti ai punti di un conveniente intorno a sinistra di s_0, essendo, inoltre, dei due cerchi corrispondenti a due valori sufficientemente prossimi di $s, s' < s''$, il primo interno al secondo.

A partire da s_0, al crescere di s, ogni cerchio comprende quello relativo ad un punto sufficientemente vicino.

Può accadere che un cerchio relativo ad un valore s_1, sia compreso (comprenda) contemporaneamente da due cerchi corrispondenti ai valori $s_1 - \xi, s_1 + \eta$ di s (con $\xi, \eta > 0$). Di tali cerchi ve ne è:

a) nei punti di massimo (o di flesso);

b) nei punti di minimo (notare che i punti cuspidali si comportano come punti di minimo).

Se la funzione $\rho(s)$ presenta punti angolosi occorre riferirsi ai tratti corrispondenti a tali punti, ogni arco presentandosi come curva a sè, salvo a considerare a parte ciò che avviene nei punti angolosi [cerchio osculatore «a destra», cerchio osculatore «a sinistra»].

Concludendo: Sia dato un arco Ω di curva, dotata di curvatura in ogni punto, sodisfacente a tutte le condizioni di regolarità che occorrono. Siano $P_1, P_3, \ldots, P_{2i+1}$ gli eventuali punti di minimo, $P_2, \ldots, P_{2i}$, quelli di massimo, $(C_1), (C_2), \ldots$ i rispettivi cerchi osculatori.

---

[1]) Si ha, qui: $\xi = x - y', \eta = y + x'$, con $x' = \rho \cos\varphi, y' = \rho \operatorname{sen}\varphi$ e: $x'^2 + y'^2 = \rho^2$.

Indi: $x'' + y' = \eta' \quad , \quad y'' - x' = -\xi'$

ed infine, successivamente:

$$\xi'^2 + \eta'^2 = \rho'^2$$

$$\eta''^2 + \xi''^2 = \rho'^2 + \rho''^2$$

$$\xi''^2 + \eta''^2 + \xi'\xi''' + \eta'\eta''' = \rho''^2 + \rho'\rho'''$$

le derivate essendo, ora, prese rispetto a φ.

I) Tutti i cerchi dell'arco $P_1 P_2$ sono tali che un generico (C) include (C_1) ed è incluso in (C_2); inoltre include tutti i cerchi che lo precedono, restando incluso in tutti quelli che lo seguono.

II) Tutti i cerchi dell'arco $P_2 P_3$ sono tali che un generico (C) è incluso in (C_2), include (C_3) ed inoltre è incluso in tutti quelli precedenti, includendo tutti i seguenti. E così via.

In altre parole:

A) Ogni cerchio C_{2i} include due successioni di cerchi tutti, successivamente interni, per ognuna delle successioni e di cui tutti quelli della prima includono C_{2i-1}, quelli della seconda includono C_{2i+1}.

B) Ogni cerchio C_{2i+1} è incluso in due successioni di cerchi, tutti successivamente esterni (per ogni successione) e di cui tutti quelli della prima sono inclusi in C_{2i}, tutti quelli della seconda sono inclusi in C_{2i+2}.

B) *Sulla configurazione delle sfere osculatrici ad una curva sghemba.*

5. — Siano ρ e $\rho + \Delta\rho$ i raggi delle sfere osculatrici nei punti:

$$P \equiv (x, y, z) \quad , \quad P_1 \equiv (x + \Delta x \quad , \quad y + \Delta y \quad , \quad z + \Delta z)$$

della curva:

$$x = x(s) \quad , \quad y = y(s) \quad , \quad z = z(s)$$

(dove s è l'arco contato a partire da un punto fisso), e λ la distanza tra i due centri, rispettivamente di coordinate:

$$(\xi, \eta, \zeta) \quad , \quad (\xi + \Delta\xi \quad , \quad \eta + \Delta\eta \quad , \quad \zeta + \Delta\zeta)$$

Dopo ciò risulta per λ^2:

$$(3) \qquad \lambda^2 = [\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2]\, ds^2 + [\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta']\, ds^3 + \\ + [4(\xi'\xi''' + \eta'\eta''' + \zeta'\zeta''') + 3(\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2)] \frac{ds^4}{12} + \ldots.$$

e pel divario dei due raggi:

$$(4) \qquad (\Delta\rho)^2 = \rho'^2\, ds^2 + \rho'\rho''\, ds^3 + 4\rho'\rho''' \frac{ds^4}{12} + \ldots.$$

Per quanto si ha di mira occorre paragonare (3) e (4). Detto R il raggio di flessione e T quello di torsione, dalla ben nota formula:

$$(5) \qquad \rho^2 = R^2 + T^2 R'^2$$

(continuando ad accennare con l'apice le derivate rispetto ad s) si deduce:

$$(6) \qquad \rho'^2 = \frac{R'^2}{R^2 + T^2 R'^2}\left[R^2 + T^2 T'^2 R'^2 + T^4 R''^2 + 2\,T\,T'\,R\,R' + \right.$$
$$\left. + 2\,T^3 R R'' + 2\,T^3\,T'\,R'\,R''\right]$$

Per valutare il coefficiente A di ds^2 in (3), partiamo dalle formule che danno le coordinate (ξ, η, ζ) del centro della sfera osculatrice nel punto (x, y, z):

$$(7) \qquad \xi = x + R\,\xi_2 - T\,R'\,\xi_3$$

(e le analoghe), in cui ξ_2, η_2, ζ_2 sono i coseni direttori della normale principale e (ξ_3, η_3, ζ_3) quelli della binormale alla curva nel punto in esame.

Si trova, tenendo conto delle formule di FRENET e posto:

$$(8) \qquad a = y'\,z'' - y''\,z' \quad , \quad b = z'\,x'' - z''\,x' \quad , \quad c = x'\,y'' - x''\,y'$$

$$(9) \qquad \xi' = -\left[\frac{R^2}{T} + T'\,RR' + T\,R\,R''\right]a$$

Per cui:

$$A = \sum \xi'^2 = \left[\frac{R^2}{T} + T'\,R\,R' + T\,R\,R''\right]^2 \cdot \sum a^2$$

e tenendo presente che è:

$$(10) \qquad \sum a^2 = \frac{1}{R^2}$$

risulta:

$$A = \left[\frac{R}{T} + T'\,R' + T\,R''\right]^2$$

ossia:

$$A = \frac{1}{T^2}\left[R^2 + T^2\,T'^2\,R'^2 + T^4\,R''^2 + 2\,T\,T'\,R\,R' + 2\,T^2\,R\,R'' + 2\,T^3\,T'\,R'\,R''\right]$$

e dicendo B l'espressione in parentesi quadra: $A = \frac{1}{T^2}\,B$.

Ne segue che si ha:

$$A - \rho'^2 = B \frac{R^3}{T^2 R^2 + T^4 R'^2}.$$

Escludendo, quindi, i punti stazionari e quelli nei quali risulta B, ossia A uguale a zero, i punti, cioè, nei quali la sfera è sovrosculatrice (che richiedono una ulteriore analisi), si può concludere che è:

$$\lambda < \Delta\rho$$

per cui le *due sfere osculatrici in punti infinitamente vicini della curva si incontrano.*

6. — Consideriamo la famiglia delle sfere osculatrici alla nostra linea, di equazione:

$$(11) \qquad (X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2 + (Z-\zeta)^2 = \rho^2$$

Le linee caratteristiche sono i cerchi osculatori alla data curva che, peraltro, è lo spigolo di regresso della superficie inviluppo delle sfere (11).

La conferma analitica di ciò si ha nel fatto che il piano individuato da (11) e da:

$$(X-\xi)\xi' + (Y-\eta) - \eta' + (Z-\zeta)\zeta' + \rho\rho' - O$$

ed il piano osculatore alla linea, nel punto (x, y, z) in cui la sfera è osculatrice, il piano, cioè:

$$Xa + Yb + Zc - (ax + by + cz) = 0$$

coincidono.

Difatti, il coseno α dell'angolo formato dai due piani, tenendo conto di (9) e (10), risulta eguale ad uno.

C) *Configurazione dei cerchi osculatori ad una curva sghemba.*

7. — Assumiamo come origine un punto O della curva:

$$(12) \qquad x = x(s) \quad , \quad y = y(s) \quad , \quad z = z(s) \quad ;$$

per asse X la tangente, per asse Y la normale principale, per asse Z la binormale alla (12) nel punto $s = 0$.

Diciamo $(\xi_1 . \eta_1 . \zeta_1)$, $(\xi_2 . \eta_2 . \zeta_2)$, $(\xi_3 . \eta_3 . \zeta_3)$ i coseni direttori, rispettivamente, della tangente, della normale principale e della binormale alla (12) in un generico punto.

L'equazione del piano osculatore nell'origine a (12) è:

$$Z = 0 \tag{13}$$

e quella della sfera osculatrice alla (12) nello stesso punto, è:

$$(X - \xi_0)^2 + (Y - \eta_0)^2 + (Z - \zeta_0)^2 = \rho_0^2 \tag{14}$$

apponendo l'indice zero a quelle espressioni che vanno calcolate nella origine.

Le equazioni del piano osculatore e della sfera osculatiice a (12) nel punto $(\Delta x_0 , \Delta y_0 , \Delta z_0)$ sono, rispettivamente:

$$(X - \Delta x_0)\,\Delta a_0 + (Y - \Delta y_0)\,\Delta b_0 + (Z - \Delta z_0)(1 + \Delta c_0) = 0 \tag{15}$$

$$(X - \xi_0 - \Delta \xi_0)^2 + (Y - \eta_0 - \Delta \eta_0)^2 + (Z - \zeta_0 - \Delta \zeta_0)^2 = (\rho_0 + \Delta \rho_0)^2 \tag{16}$$

Posto, per brevità:

$$d_0 = \Delta x_0 . \Delta a_0 + \Delta y_0 . \Delta b_0 + \Delta z_0 . \Delta c_0 - \Delta z_0 \tag{17}$$

ed assunto $Y = R$, (13) e (15) offrono:

$$X = \frac{d_0 - R\,\Delta b_0}{\Delta a_0} \quad , \quad Y = R \quad , \quad Z = 0 \tag{18}$$

Tenuto conto che per la particolare scelta degli assi è:

$$\xi_0 = o \quad , \quad \eta_0 = R_0 \quad , \quad \zeta_0 = - T_0 R_0 = h_0$$

e che pertanto:

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 - \rho_0^2 = O$$

attraverso le (18), la (14) e la (16), rispettivamente, conducono alle due equazioni in K:

$$K^2 [\Delta a_0^2 + \Delta b_0^2] - 2K [d_0 \Delta b_0 + \eta_0 \Delta a_0^2] + d_0^2 = 0 \tag{19}$$

$$
\begin{aligned}
&k^2\,[\Delta a_0^2+\Delta b_0^2]-2k\,[d_0\,.\,\Delta b_0+\eta_0\,\Delta a_0^2-\Delta b_0\,\Delta\xi_0+\Delta\eta_0\,\Delta a_0^2]+\\
&+d_0^2+\Delta a_0^2\,[\Delta\xi_0^2+\Delta\eta_0^2+\Delta\zeta_0^2)+2\,\Delta a_0^2\,[\xi_0\,\Delta\xi_0+\eta_0\,\Delta\eta_0+\\
&+\zeta_0\,\Delta\zeta_0-\rho_0\,\Delta\rho_0]-\Delta a_0^2\,\Delta\rho_0^2-2\,d_0\,\Delta a_0\,\Delta\xi_0=0.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Queste equazioni ci forniranno, attraverso le (18), i punti di intersezione della retta comune ai due piani osculatori sopra definiti con le due sfere osculatrici e, quind'anche, con i due circoli osculatori corrispondenti.

Negli sviluppi che seguiranno terremo conto degli infinitesimi sino a quelli di 5° ordine epperò, proprio per tal mira, non sarà necessario, per alcuni sviluppi, portar presenti infinitesimi il cui ordine eccederebbe il 5° appena effettuate le operazioni che si richiedono.

Si ha, intanto, per la particolare scelta degli assi:

$$a_0=0\ ,\ a'_0=0\ ,\ a''_0=-\frac{1}{R_0^2\,T_0}$$

$$b_0=0\ ,\ b'_0=\frac{1}{R_0\,T_0}\ ,\ c_0=-\frac{1}{R_0}\ ,\ c'_0=\frac{R'_0}{R_0^2}$$

$$\Delta x_0=ds-\frac{1}{6R_0^2}\,ds^3+\frac{1}{8}\,\frac{R'_0}{R_0^3}\,ds^4+\ldots.$$

$$\Delta y_0=\frac{1}{2R^0}\,ds^2-\frac{1}{6}\,\frac{R'_0}{R^2_0}\,ds^3-\ldots.$$

$$\Delta z_0=-\frac{1}{6R_0\,T_0}\,ds^3+\frac{R_0\,T'_0+2\,T_0\,R'_0}{24\,R_0^2\,T_0^2}\,ds^4+\ldots.$$

ed inoltre conviene tener conto, in base alle (7) ed alle precedenti, che risulta:

$$\xi_0=0\ ,\ \xi'_0=0\ ,\ \xi''_0=0\ ,\ \xi'''_0\neq 0$$
$$\eta_0=R_0\ ,\ \eta'_0=0\ ,\ \eta''_0\neq 0$$
$$\zeta_0=-T_0R'_0\ ,\ \zeta'_0\neq 0.$$

Presenti tali risultati si trova, successivamente:

$$\Delta a_0^2=\frac{a''_0}{4}\,ds^4+\frac{1}{6}\,a''_0\,a'''_0\,ds^5$$

$$\Delta b_0^2=b'^2\,ds^2+b'_0\,b''_0\,ds^3+\left(\frac{b''^2_0}{4}+\frac{1}{3}\,b'_0\,b'''_0\right)ds^4+\left(\frac{b'_0\,b^{IV}_0}{12}+\frac{b''_0\,b'''_0}{6}\right)ds^5$$

$$d^0 = \left[\frac{a''^0}{2} + \frac{b'_0}{2R_0} + \frac{1}{6R_0T_0}\right] ds^3 + \left[\frac{c'''_0}{6} + \frac{b''_0}{4R_0} - \frac{b'_0 R'_0}{6R_0^2} - \frac{c'_0}{6R_0T_0} - \frac{R_0T'_0 - 2T_0R'_0}{24R_0^2T_0^2}\right] ds^4$$

$$d_0 . \Delta b_0 = \left[\frac{a''_0 b'_0}{2} + \frac{b_0'^2}{2R_0} + \frac{b'_0}{6R_0T_0}\right] ds^4 + \left[\frac{a''_0 b''_0}{4} + \frac{b'_0 b''_0}{2R_0} + \frac{b''_0}{12R_0T_0} + \right.$$
$$\left. + \frac{b'_0 a'''_0}{6} - \frac{b_0'^2 R'_0}{6R_0^2} - \frac{c'_0 b'_0}{6R_0T_0} - \frac{b'_0(R_0T'_0 + 2T_0R'_0)}{24R_0^2T_0^2}\right] ds^5$$

$$\Delta a_0 . \Delta \xi_0 = \frac{a''_0 \xi'''_0}{12} ds^5 \quad , \quad \Delta a_0^2 . \Delta \rho_0 = \frac{a''^2 \rho'_0}{4} ds^5$$

$$\Delta a_0^2 . \Lambda \zeta_0 = \frac{a''^2_0 \zeta'_0}{4} ds^5$$

e poi in conseguenza:

$$d^2_0 = 0 \qquad \Delta a^2_0 \Delta \eta_0 = 0 \qquad \Delta a_0 \Delta b_0 \Delta \xi_0 = 0 \qquad \Delta \xi^2 = 0 \qquad \Delta a_0^3 \Delta \xi_0^2 = 0$$

$$\Delta a_0^2 \Delta \eta_0^2 = 0 \qquad \Delta a_0^2 \Delta \zeta_0^2 = 0 \qquad \Delta a_0^2 \Delta \rho_0^2 = 0 \qquad \Delta \eta_0 . \Delta a_0^2 = 0$$

$$d_0 \Delta a_0 \Delta \xi_0 = 0$$

In seguito a ciò le due equazioni in R: (19) e (20) diventano:

(21) $$p K^2 - 2Kq = 0$$

(22) $$p K^2 - 2Kq + r = 0$$

con:

$$p = b'^2_0 ds^2 + b'_0 b''_0 ds^3 + \left(\frac{a''^2_0 + b''^2_0}{4} + \frac{b'_0 b'''_0}{3} \right) ds^4 + \left(\frac{a''_0 a'''_0 + b''_0 b'''_0}{6} + \frac{b'_0 b^{IV}_0}{12} \right) ds^5$$

$$q = \left[\frac{a''_0 b'_0}{2} + \frac{b'^2_0}{2 R_0} + \frac{b'_0}{b R_0 T_0} + \frac{a'_0}{4} R_0 \right] ds^4 + \left[\frac{a''_0 b''_0}{4} + \frac{b'_0 b''_0}{2 R_0} + \frac{b'_0}{12 R_0 T_0} + \frac{b'_0 a'''_0}{6} + \right.$$
$$\left. - \frac{b'^2_0 R'_0}{6 R_0} - \frac{c'_0 b'_0}{6 R_0 T_0} - \frac{b'_0 (R_0 T'_0 + 2 T_0 R'_0)}{24 R^2_0 T^2_0} - \frac{R_0 a''_0 a'''_0}{6} \right] ds^5$$

$$r = - \frac{d R_0}{2 T^2_0 R^3_0} ds^4$$

Ne segue che r non può annullarsi salvo nei punti stazionari della curva ed in quelli nei quali risulta massimo o minimo il cerchio osculatore. Un ulteriore analisi (spingendosi oltre nell'infinitesimo) varrebbe a decidere di questi punti. Ma a noi è sufficiente quanto precede per poter concludere che *per una curva sghemba — così come per una piana — due cerchi osculatori infinitamente vicini non hanno punto in comune.*

8. — Notando che il coefficiente di ds^4 in q si riduce a:

$$\frac{1}{(2 R_0 T_0)^2} \cdot \frac{2 R_0 + 3}{3 R_0}$$

si trova pel discriminante della (22):

$$\left[\frac{ds^3}{2 T^2_0 R^3_0} \right]^2 d R^2_0$$

e pertanto si possono assumere le radici di (22) nei valori:

$$\pm \frac{ds}{2 R_0} \sqrt{d R^2_0}$$

risultando, tali radici, reali, se R cresce con gli archi, complesse coniugate, nel caso contrario.

Poichè le radici di (21) sono:

$$\left\{ 0 \quad ; \quad \frac{2R_0 + 3}{6R_0} ds^2 \right.$$

ne segue, nella ipotesi di R crescente con gli archi, che le due radici di (22) comprendono quelle di (21).

Si può, quindi, concludere col dire che, *non solo due cerchi osculatori, infinitamente vicini, di una curva gobba non si toccano, ma che essi* **non si concatenano.** In altre parole, di due cerchi osculatori infinitamente vicini, una retta molto prossima alla tangente al primo tocca in due punti tale cerchio, mentre tocca il secondo cerchio in due punti esterni ai primi.

Ciò è conforme a quanto si verifica per la configurazione delle curve piane, configurazione alla quale dobbiamo tendere ove immaginiamo di ridurre a zero la torsione della curva sghemba.

9. — Una conferma — che, peraltro, non poteva da sola sostituire la dimostrazione svolta — dei risultati ottenuti si ha considerando le intersezioni della tangente al cerchio osculatore nell'origine alla nostra curva, con la sfera osculatrice alla curva stessa, di equazione (16).

Difatti si trova, con brevi calcoli, che il discriminante della equazione che se ne deduce è dato da:

$$\Delta = d\,[\rho_0^2 - \zeta_0^2] = d\,R_0^2$$

Il che è, — come si è rilevato — in perfetta rispondenza col caso delle curve piane, per le quali, se ρ cresce con s, i cerchi sono l'uno interno all'altro e pertanto la tangente al 1° deve incontrare, di necessità, in punti reali il 2°, mentre se ρ non cresce con s, i cerchi sono l'uno esterno all'altro, sicchè la tangente al 1° cerchio non ha intersezioni reali col secondo. È quanto si verifica per i cerchi osculatori ad una curva sghemba.

Non era, d'altra parte, lecito affermare «a priori» che il comportamento dei cerchi osculatori ad una curva sghemba dovesse essere, in tutto e pertutto, non dissimile da quello dei cerchi osculatori ad una curva piana.

Sulla rappresentazione conforme delle superficie rettificabili.

Nota del prof. **Antonio Colucci**, *presentata dal socio* **R. Caccioppoli**

(Adunanza del dì 5 marzo 1941 - XIX)

Sunto. — Si stabiliscono le proprietà fondamentali di una rappresentazione conforme generalizzata per le superficie rettificabili.

1. È noto che una rappresentazione conforme di una superficie variabile e tendente ad un limite fornisce, sotto opportune condizioni, una (almeno) rappresentazione limite. Di questo procedimento ci siamo valsi, Caccioppoli ed io, per studiare la corrispondenza fra i contorni e la rappresentazione conforme di superficie a connessione infinita [1]).

Se la superficie limite non è regolare, la rappresentazione limite può ancora dirsi *conforme* in senso lato; a scanso di equivoci, la chiameremo *quasi-conforme.*

In questa Nota ci proponiamo di approfondire lo studio della rappresentazione quasi-conforme per una classe importante di superficie, quelle dette *rettificabili* da Lebesgue. Rettificabile si chiama una superficie S suscettibile di una rappresentazione parametrica:

$$x = x(u,v) \quad , \quad y = y(u,v) \quad , \quad z = z(u,v),$$

nella quale a curve rettificabili del dominio base D corrispondono curve rettificabili su S.

L'equivalente analitico della rettificabilità è che le tre funzioni $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ sono uniformemente lipschitziane in D.

Queste superficie hanno quasi ovunque il piano tangente, perchè le tre funzioni che le definiscono sono quasi ovunque differenziabili (teorema di Rademacher). [2]) L'area di S è data da $\iint_D \sqrt{EG - F^2}\, du dv$, la funzione integranda essendo definita quasi ovunque in D, è limitata e mi-

---

[1]) R. Caccioppoli, *Rappresentazione conforme e superficie quadrabili.* « Rend. R. Acc. Lincei », 2° sem. 1935; *Sulla rappresentazione conforme delle superficie.* « Rend. R. Acc. Lincei, 1° sem. 1936; A. Colucci, *Sulla rappresentazione conforme delle superficie a connessione multipla,* in corso di stampa presso la R. Acc. d'Italia.

[2]) Rademacher. *Ueber partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variabeln.* « Mathematische Annalen », vol. 79 e vol. 81.

surabile in forza della condizione di LIPSCHITZ uniforme (E, F, G avendo l'ordinario significato della geometria differenziale).

L'area di un insieme qualunque di S si definisce con lo stesso integrale esteso al corrispondente insieme del dominio base.

Il risultato principale della presente ricerca è che una superficie rettificabile ammette rappresentazioni conformi nel senso ordinario, se si prescinde da un insieme di punti avente area nulla. Per stabilirlo, ci fonderemo essenzialmente sul seguente teorema di STEPANOFF, estendente quello di RADEMACHER:

Una funzione lipschitziana (non uniformemente) in quasi tutti i punti di un insieme vi è quasi ovunque differenziabile. [1])

2. Passiamo a costruire la rappresentazione quasi-conforme per una superficie rettificabile di equazioni:

$$x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v) \quad , \quad z = z(u, v)$$

(u, v) variando nel dominio base semplicemente connesso (limitato da una curva di JORDAN) D.

Consideriamo una superficie analitica S_n di equazioni:

$$x = x_n(u, v) \quad , \quad y = y_n(u, v) \quad , \quad z = z_n(u, v)$$

e supponiamo che

$$\lim_{n\to\infty} x_n(u, v) = x(u, v) \quad , \quad \lim_{n\to\infty} y_n(u, v) = y(u, v) \quad , \quad \lim_{n\to\infty} z_n(u, v) = z(u, v),$$

e che l'area di S_n tenda all'area di S.

Poniamo in rappresentazione conforme S_n con un cerchio Γ mediante tre equazioni del tipo:

$$x = \varphi_n(u', v') \quad , \quad y = \psi_n(u', v') \quad , \quad z = \chi_n(u', v')$$

dove φ_n, ψ_n, χ_n denotano certe funzioni regolari, anzi analitiche, del punto (u', v') variabile in Γ.

Si vede facilmente [2]) che φ_n, ψ_n, χ_n sono egualmente continue; da ciò e dall'ulteriore circostanza che tali successioni sono equilimitate segue che esse ammettono una terna di accumulazione:

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n \quad , \quad \psi = \lim_{n\to\infty} \psi_n \quad , \quad \chi = \lim_{n\to\infty} \chi_n$$

Queste funzioni risultano definite in Γ, ivi dotate di derivate parziali

---

[1]) STEPANOFF, *Ueber totale Differenzierbarkeit.* « Math. Annalen », vol. 90.

[2]) Vedere i lavori citati nel n. 1.

di quadrato sommabile e assolutamente continue rispetto ad u' e v' per quasi tutti i valori di v' ed u' rispettivamente. E sono verificate quasi ovunque le condizioni di conformità:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u'}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial u'}\right)^2+\left(\frac{\partial\chi}{\partial u'}\right)^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v'}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v'}\right)^2+\left(\frac{\partial\chi}{\partial v'}\right)^2 \quad ,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u'}\frac{\partial\varphi}{\partial v'}+\frac{\partial\psi}{\partial u'}\frac{\partial\psi}{\partial v'}+\frac{\partial\chi}{\partial u'}\frac{\partial\chi}{\partial v'}=0$$

Vogliamo ora mostrare che *le funzioni* φ, ψ, χ *sono differenziabili nei punti di* Γ, *salvo in un insieme al quale corrisponde su* S *un insieme di area nulla.*

All'uopo ci serviremo del teorema di Stepanoff, provando dapprima che le dette funzioni sono lipschitziane in Γ, fuorchè nei punti di un insieme il cui corrispondente ha area nulla.

Consideriamo un punto (u'_0, v'_0) interno a Γ e supponiamo che in esso una delle tre funzioni φ, ψ, χ non sia lipschiziana. Allora preso un numero positivo k grande a piacere, potremo trovare in Γ un punto (u', v') a distanza δ piccola a piacere da (u'_0, v'_0), tale che la distanza dei due punti corrispondenti sulla superficie sia maggiore di $k\delta$. Sia P_0 il punto corrispondente su S a (u'_0, v'_0) e sia (u_0, v_0) il punto del dominio base D cui corrisponde P_0. Supponiamo che in (u_0, v_0) le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ siano differenziabili, sicchè la superficie S ammetta, nel punto P_0, piano tangente. È chiaro che la scelta di (u'_0, v'_0) si può fare prescindendo da un insieme di Γ al quale corrisponde su S un insieme di area nulla.

Consideriamo nel dominio base una corona circolare C di centro (u_0, v_0) e raggi δ e $k\delta$, che supponiamo — com'è lecito — interna al campo Γ, ed esaminiamo le curve della superficie S_n che corrispondono alle circonferenze della corona. È ovvio che se δ è abbastanza piccola e n abbastanza grande tutte queste curve hanno lunghezza maggiore di $k\delta$.

Ciò premesso valutiamo l'area della regione anulare di S_n corrispondente a C. Diciamo γ_n tale regione e μ_n il rapporto — variabile da punto a punto — tra gli elementi lineari di S_n e Γ. Abbiamo:

$$\text{area } \gamma_n = \iint_C \mu_n^2 \, du'dv' = \int_\delta^{k\delta} d\rho \int_0^{2\pi} \mu_n^2 \rho d\theta > \int_\delta^{k\delta} \frac{d\rho}{2\pi\rho} \cdot k^2\delta^2 = \frac{k^2\delta^2}{2\pi} \log k.$$

Se C' denota il cerchio esterno della corona e γ'_n la regione corrispondente su S_n si ricava:

$$\frac{\text{area } \gamma'_n}{\text{area } C'} > \frac{\text{area } \gamma_n}{\text{area } C'} > \frac{1}{2\pi^2} \log k \quad ,$$

e passando al limite per $n \to \infty$

$$\frac{\text{area } \gamma'}{\text{area } C'} > \frac{1}{2\pi^2} \log k$$

dove γ' rappresenta naturalmente la regione di S corrispondente a C'. Da questa disuguaglianza discende che nel punto (u_0, v_0) la derivata dell'area della superficie, come funzione additiva di insieme, non può essere finita. Ma ciò può accadere solo per i punti di un insieme di misura nulla.

Diciamo Γ^* l'insieme dei punti di Γ dove sono verificate le seguenti circostanze:

1) la superficie ammette piano tangente nel punto corrispondente, risultando le funzioni $x(u, v)$,... differenziabili nel corrispondente punto del dominio D;

2) φ, ψ, χ sono differenziabili e si ha:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial u'}\right)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial v'}\right)^2 ,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u'} \frac{\partial \varphi}{\partial v'} + \frac{\partial \psi}{\partial u'} \frac{\partial \psi}{\partial v'} + \frac{\partial \chi}{\partial u'} \frac{\partial \chi}{\partial v'} = 0 ;$$

3) l'area della superficie ammette derivata finita e non nulla, data da

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial u'}\right)^2 .$$

Dopo quanto abbiamo provato risulta dal teorema di STEPANOFF che φ, ψ, χ sono differenziabili in quasi tutti i punti dell'insieme dove si verificano le circostanze (1) e (3) [1]). Quindi a $\Gamma - \Gamma^*$ corrisponde su S un insieme di area nulla. In ogni punto M di Γ^* le funzioni φ, ψ, χ sono differenziabili, è verificata la disuguaglianza

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u'} & \frac{\partial \psi}{\partial u'} & \frac{\partial \chi}{\partial u'} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v'} & \frac{\partial \psi}{\partial v'} & \frac{\partial \chi}{\partial v'} \end{matrix} \right\| \neq 0$$

e la corrispondenza tra Γ ed S è conforme nel senso che a due curve di Γ dotate di tangenti in M corrispondono su S due curve dotate di tangenti nel punto corrispondente e facenti lo stesso angolo.

---

[1]) In verità applichiamo qui del teorema una lieve estensione: *Una funzione lipschitziana in una porzione I' del suo insieme di definizione I è differenziabile in quasi tutti i punti di I'.* Questa estensione è peraltro immediata.

Pertanto possiamo enunciare il seguente teorema:

Una corrispondenza quasi-conforme di una superficie rettificabile è quasi ovunque conforme, nel senso ordinario, sulla superficie.

A quasi tutti i punti di S corrisponde un unico punto di Γ. A parte questo non si può dire che la corrispondenza fra Γ ed S sia biunivoca, a meno che non sia verificata qualche altra condizione.

Una simile condizione è, per esempio, l'*omogeneità* di S in ogni suo punto, dicendosi S omogenea in P se il rapporto fra l'area della porzione di S contenuta in una sfera di centro P ed il quadrato del raggio di questa sfera è superiormente limitato.

3. Un risultato più preciso si può ottenere se la superficie è tale che in un'opportuna rappresentazione parametrica non solo corrispondono curve rettificabili della superficie a curve rettificabili del dominio base, ma anche inversamente. Diremo in tal caso che la superficie è *birettificabile*.

La proprietà analitica corrispondente è che i rapporti:

$$\frac{|\Delta x|+|\Delta y|+|\Delta z|}{|\Delta u|}\,,\qquad \frac{|\Delta x|+|\Delta y|+|\Delta z|}{|\Delta v|}$$

sono limitati non solo superiormente, ma anche inferiormente da un numero positivo.

Si vede subito che una superficie birettificabile è omogenea, di guisa che è assicurata per essa la biunivocità della corrispondenza quasi-conforme.

Continuando ad indicare con u, v i parametri del dominio D e con u', v' quelli del cerchio Γ, vi è corrispondenza biunivoca — attraverso la superficie S — tra u, v e u', v'. Inoltre u, v come funzioni di u', v' hanno le stesse proprietà qualitative di φ, ψ χ, cioè sono assolutamente continue in u e v per quasi tutti i valori di v ed u rispettivamente, ed hanno derivate di quadrato sommabile. Questo segue dal fatto che i rapporti

$$\frac{|\Delta u|}{|\Delta\varphi|+|\Delta\psi|+|\Delta\chi|}\,,\qquad \frac{|\Delta v|}{|\Delta\varphi|+|\Delta\psi|+|\Delta\chi|}\,,$$

sono limitati superiormente. Dico che, inversamente, u' e v' hanno le stesse proprietà come funzioni di u e v.

Indicando con λ_n^2 il rapporto delle aree elementari di S_n e di Γ si ha:

$$\text{area } \Gamma = \iint_D \sqrt{E_n G_n - F_n^2}\,\frac{du\,dv}{\lambda_n^2}$$

con

$$E_n = \left(\frac{\partial x_n}{\partial u'_n}\,\frac{\partial u'_n}{\partial u} + \frac{\partial x_n}{\partial v'_n}\,\frac{\partial v'_n}{\partial u}\right)^2 + \ldots = \lambda_n^2\left[\left(\frac{\partial u'_n}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'_n}{\partial u}\right)^2\right],$$

$$G_n = \left(\frac{\partial x_n}{\partial u'_n}\,\frac{\partial u'_n}{\partial v} + \frac{\partial x_n}{\partial v'_n}\,\frac{\partial v'_n}{\partial v}\right)^2 + \ldots = \lambda_n^2\left[\left(\frac{\partial u'_n}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'_n}{\partial v}\right)^2\right]$$

e con evidente significato dei simboli u'_n, v'_n. Segue:

$$\frac{1}{\lambda_n^2} = \frac{1}{E_n}\left[\left(\frac{\partial u'_n}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'_n}{\partial u}\right)^2\right] = \frac{1}{G_n}\left[\left(\frac{\partial u'_n}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'_n}{\partial v}\right)^2\right],$$

e quindi

$$\text{area } \Gamma = \frac{1}{2}\iint_D \sqrt{E_n G_n - F_n^2}\left\{\frac{1}{E_n}\left[\left(\frac{\partial u'_n}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'_n}{\partial u}\right)^2\right] + \frac{1}{G_n}\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'_n}{\partial v}\right)^2\right]\right\} du\,dv.$$

Possiamo supporre che E_n, G_n siano superiormente limitati, al pari di E, G; e dippiù che $E_n G_n - F_n^2$ sia inferiormente limitato da un numero positivo fisso [1]). Segue allora dalla precedente espressione dell'area di Γ che gli integrali di DIRICHLET delle funzioni u'_n, v'_n:

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial u'_n}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'_n}{\partial v}\right)^2\right] du\,dv \quad , \quad \iint_D \left[\left(\frac{\partial v'_n}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'_n}{\partial v}\right)^2\right] du\,dv$$

sono limitati, e questo basta a provare che $u' = \lim_{n\to\infty} u'_n$, $v' = \lim_{n\to\infty} v'_n$ hanno derivate di quadrato sommabile, e sono assolutamente continue in u e v per quasi ogni valore di v ed u sispettivamente.

Si vede in tal modo che l'area di una porzione variabile del cerchio Γ è funzione assolutamente continua della corrispondente porzione del dominio base D. Ne segue che dato un insieme di area nulla sulla superficie S, ad esso corrisponde un insieme di misura nulla sul dominio base D (in virtù della birettificabilità); d'altra parte a questo corrisponde un insieme di misura nulla su Γ, dimodochè ad un insieme di area nulla su S corrisponde un insieme di misura nulla su Γ.

Possiamo dunque completare il risultato ottenuto per le superficie rettificabili enunciando che:

Una corrispondenza quasi-conforme di una superficie birettificabile è biunivoca e conforme nel senso ordinario, a prescindere da un insieme di area nulla cui corrisponde nel piano un insieme di misura nulla.

Se la superficie è limitata da una curva di JORDAN, ciò che è il caso, se come abbiamo supposto D è limitato da una curva cosiffatta, la corrispondenza biunivoca si estenderà ai contorni.

---

[1]) Per ottenere ciò basta approssimare S mediante superficie poliedriche come ha fatto RADEMACHER (loc. cit., n. 16); volendo che S_n sia regolare, sostituire questi poliedri con superficie regolari convenientemente prossime.

Sulla presenza di β- e α-cristobalite in alcuni campioni di opale

Nota dei dottori **Vittorio Cirilli** *e* **Antonio Giannone**,
presentata dal socio **G. Malquori**

(Adunanza del dì 5 aprile 1941 - XIX)

Sunto. — Gli A.A. hanno sottoposto all'analisi röntgenografica e termodilatometrica alcuni campioni di opale di differenti provenienze. Nella maggior parte di essi hanno riscontrato, ma in diverso rapporto, la presenza di α- e di β-cristobalite.

È stata studiata l'influenza del trattamento termico fino a 800°, ed è stato trovato che mentre in alcuni casi il trattamento suddetto rende invertibile l'α-cristobalite, per la più gran parte dei campioni esaminati il riscaldamento non influisce in modo apprezzabile sulla invertibilità dell'α-cristobalite metastabile contenuta nei materiali di partenza.

Alcuni anni or sono J. Levin e E. Ott [1]) riscontrarono la presenza di cristobalite nello spettro dei raggi X di differenti campioni di opale, constatando altresì che la maggior parte di questi conteneva cristobalite metastabile (α-cristobalite: $\beta \rightleftarrows \alpha \sim 230°$). Successivamente J. W. Greig [2]) F. P. Dwyer e D. P. Mellor [3]), T. Nakai e Y. Fukami [4]), N. L. Taliaferro [5]), hanno confermato l'osservazione degli A. A. su ricordati.

Sulla interpretazione della genesi di tale cristobalite non si hanno notizie soddisfacenti, come del resto, ben poco è conosciuto sulla evoluzione verso l'assetto cristallino dei geli di silice artificiali, nelle ordinarie condizioni di temperatura e di pressione nonchè per i tempi di osservazione ai quali si riferiscono le indagini sporadiche espletate sull'argomento.

B. E. Warren [6]) osserva, ad esempio, sullo spettro di un campione

---

[1]) J. Levin, E. Ott, Zeit. Krist. *85*, 305, (1933). — Journ. Am. Chem. Soc. *54*, 828, 1932).

[2]) J. W. Greig, Journ. Am. Chem. Soc. *54*, 2846, (1932).

[3]) F. P. Dwyer, D. P. Mellor, Zentr. Bl. I, 680, (1934); II, 3103, (1934); I, 1520, (1935).

[4]) T. Nakai, Y. Fukami, Journ. Soc. Chem. Ind. Japan, *37*, 283, (1934).

[5]) N. L. Taliaferro, Am. Journ. Sci. (5), *30*, 450, (1935).

[6]) B. E. Warren, Zeit. Krist. *86*, 349, (1933). — Journ. Applied Phys. *8*, 645, (1937) — G. W. Morey, « *The properties of Glass* », New-York, 1938.

di « silicagel » la presenza di due bande: la più interna l'attribuisce ad inomogeneità del materiale (vacuoli), la posizione del massimo della banda esterna invece coincide quasi con quella del massimo di una banda analoga che presenta lo spettro del vetro di silice, posizione che, a sua volta, è molto prossima a quella della riga più intensa dello spettro della β-cristobalite (Fig. 1). *)

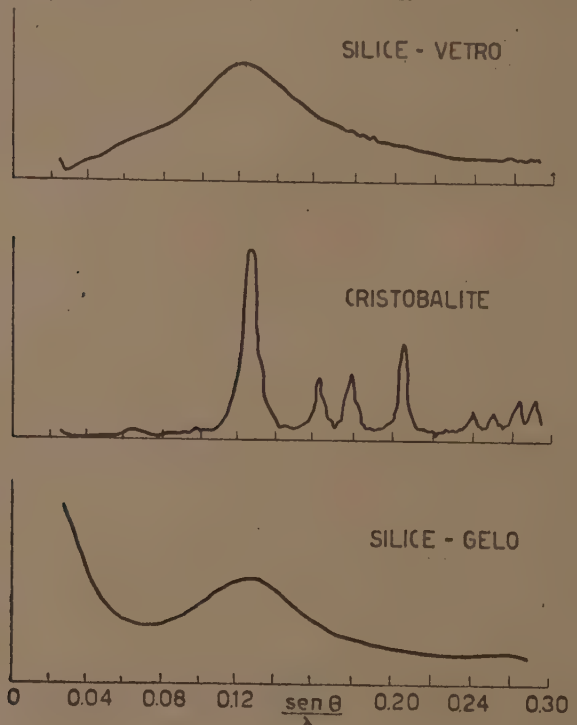


Fig. 1.

J. T. Randall, H. P. Rooksby e B. S. Cooper [1]) interpretano l'esistenza della banda in questione ammettendo che il vetro di silice contenga dei cristalliti di cristobalite, ipotesi che è però confutata dallo stesso Warren [2]), il quale fa rilevare che fra la posizione della riga più forte dello spettro della cristobalite e quella del massimo della banda che caratterizza il vetro di silice, sussiste costantemente una differenza netta, se pur lieve, non solo, ma negli spettrogrammi del vetro sottoposto a trattamento

[1]) J. T. Randall, H. P. Rooksby, B. S. Cooper, Journ. Soc. Glass. Tech. *14*, 219, (1930); *15*, 54, (1931). — J. T. Randall, « *The diffraction of X rays and electrons by amorphous solids, liquids and gases* », Londra, 1934.

[2]) l. c.

*) La figura è stata ripresa da « *The properties of Glass* » di G. W. Morey.

termico per tempi e per temperature successivamente crescenti, non si osservano quelle graduali variazioni che dovrebbero svelare l'aumento delle dimensioni dei cristalliti, supposto con RANDALL che questi siano presenti nel vetro di partenza.

In conclusione, la vicinanza dei massimi delle bande degli spettri del vetro e del gelo di silice alla riga più intensa dello spettro della β-cristobalite sarebbe puramente casuale, a meno di non interpretarla come indice dell'inizio dell'evoluzione del sistema instabile (vetro) verso l'assetto ordinato (cristallino).

Abbiamo ricordato più avanti che LEVIN e OTT trovano in diversi fra gli opali da loro studiati dell'α-cristobalite, fenomeno questo possibile e conosciuto solo per materiali che hanno subito trattamento termico, dipendendo il permanere instabile a temperatura ordinaria, dell'α-cristobalite, dalla presenza di sostanze estranee nonchè dalla storia del trattamento medesimo: sostanzialmente dalla temperatura raggiunta, dalla durata di cottura, dalla velocità di raffreddamento.

GREIG [1]) ha osservato, ad esempio, che la silice ottenuta a seguito della scissione termica dei minerali del gruppo della sillimanite (sillimanite, andalusite, cianite) in mullite e silice, è in parte contenuta nelle rispettive chamottes sotto forma di cristobalite metastabile (α-cristobalite).

Abbiamo voluto confermare i risultati delle ricerche röntgenografiche di LEVIN e OTT, con l'analisi termo-dilatometrica di alcuni campioni di opale di differenti provenienze.

Tale mezzo d'indagine permette di poter rilevare con buona sensibilità, la presenza di β-cristobalite nei materiali di partenza, dato che la trasformazione: $\beta \rightleftarrows \alpha$ che ha luogo a circa 230°, è accompagnata da notevole variazione di volume.

Le esperienze dilatometriche le abbiamo condotte servendoci del dilatometro CHEVENARD e lavorando su provini di 2 o di 3 cm. di lunghezza. Per questo nella Tav. I, accanto alla riproduzione delle curve differenziali originali (le curve I si riferiscono al materiale naturale, le II agli stessi materiali dopo riscaldamento a 800°), riportiamo — per i materiali trattati — le curve di dilatazione assoluta che si ricavano dalle differenziali di cui sopra con un semplice metodo analitico [2]).

Qui di seguito descriviamo, per ogni singolo materiale studiato, quanto è risultato dalla sperimentazione espletata.

Campione I. — La curva termo-dilatometrica mostra una brusca dilatazione verso i 200°, che è dovuta all'inversione della β-cristobalite pre-

---

[1]) J. W. GREIG, Journ. Am. Ceram. Soc. *8*, 465, (1925).

[2]) P. CHEVENARD, «*Analyse dilatometrique des materiaux*». Parigi, 1929.

sente nell'opale; al raffreddamento la trasformazione è del tutto reversibile.

La seconda dilatazione che si osserva sulla curva di riscaldamento a circa 350°, è irregolare ed è dovuta all'eliminazione dell'acqua che, per quella temperatura, avviene rapidamente favorita dalla fessurazione del provino conseguente alla inversione della β-cristobalite.

Sulle curve di riscaldamento e di raffreddamento del campione trattato a 800° (curva II) non si nota aumento di cristobalite. Il trattamento termico non ha quindi avuto alcun effetto sul rapporto: SiO_2 amorfa / SiO_2 cristallina.

Lo spettro di questo campione presenta le righe della β-cristobalite (Tav. II).

Campione II. — La curva termo-dilatometrica indica dilatazione notevole fra circa 130° e 230°, e a circa 450°. La prima dilatazione è dovuta alla presenza, nel campione in esame, di β-cristobalite e forse di tridimite, la seconda all'eliminazione dell'acqua.

Sulla curva di ritorno si osserva invece un sensibile aumento di cristobalite in corrispondenza dell'inversione: $\alpha \rightarrow \beta$.

Lo spettro del materiale crudo (Tav. II) mostra nettamente le righe dell'α-cristobalite *) mentre quello del cotto a 800° contiene le righe della β-cristobalite.

---

*) I valori delle distanze reticolari da noi trovati coincidono — trascurando alcune righe deboli — con quelli forniti da R. W. G. Wyckoff (Zeit. Krist., 62, 189, 1925) per la cristobalite di alta temperatura (α-cristobalite):

nostri valori		valori di Wyckoff	
d	I	d	I
4,13	f.f.	4,142	20,0
2,52	f.	2,527	9,0
2,08	m.	2,072	2,5
1,63	m.f.	1,639	7,0
1,45	m.	1,456	6,0
1,37	d.	1,374	2,0
1,25	d.	1,262	3,0
1,20	m.	1,204	5,5
1,11	d.	1,126	2,0

Oltre le righe appartenenti all'α-cristobalite abbiamo osservato due righe deboli: d = 3,15 — 2,80 da attribuirsi a due righe piuttosto intense che compaiono nello spettro della β-cristobalite (d = 3,13 — 2,85).

Queste constatazioni ci permettono di asserire che a seguito del trattamento termico sono scomparse le cosidette resistenze passive che permettevano la presenza a temperatura ordinaria dell'α-cristobalite metastabile, nell'opale studiato.

Campione III. — Questo campione contiene invece una piccola quantità di β-cristobalite, quantità che non aumenta a seguito del trattamento termico a 800° (curva II).

Lo spettro dell'opale naturale (Tav. II) fornisce le righe dell'α-cristobalite, e non si modifica dopo il riscaldamento.

Il trattamento termico non è quindi risultato idoneo a normalizzare il comportamento della cristobalite contenuta nel campione esaminato.

Campione IV. — Il suo comportamento è del tutto analogo a quello del campione III.

La cristobalite che esso contiene trovasi principalmente nella forma α, e non subisce l'inversione $\alpha \rightarrow \beta$ nel decorso del raffreddamento del materiale previamente portato a 800°.

Campione V. — In questo campione accanto a piccole quantità di β-cristobalite è presente tridimite.

La riga $d = 2{,}08$ è alquanto diffusa e più intensa di quella dello spettro di Wyckoff, perchè probabilmente si somma con due righe vicine della β-cristobalite ($d = 2{,}11 - 2{,}02$).

Delle anomalie riscontrate nell'intensità reciproca di alcune righe dello spettro del prodotto ottenuto per riscaldamento a 800° lasciano dedurre che anche in quest'ultimo sono effettivamente contenute le due forme della cristobalite e che pertanto durante il raffreddamento solo una parte dell'α-cristobalite è capace di trasformarsi nella forma stabile.

Si può d'altra parte obiettare che per riscaldamento a 800° una parte del gelo di silice cristallizzi e che sia questa la ragione che ha provocato l'aumento di cristobalite osservata con l'analisi dilatometrica. A parte però il fatto che la temperatura di 800° e la breve durata con la quale è stato eseguito il riscaldamento sembrano essere insufficienti a provocare questa cristallizzazione, dalle esperienze di Dwyer e Mellor (loc. cit.) risulta che la cristobalite ottenuta riscaldando un campione di opale a 800° in presenza di mineralizzatori, appartiene alla forma di alta temperatura non invertitasi a seguito del riscaldamento. Questi A. A. hanno infatti osservato che per ottenere inversione bisogna riscaldare a temperature alquanto più elevate (fino a 1500°). Nel nostro caso è pertanto poco probabile che l'aumento della quantità di β-cristobalite osservato nel prodotto riscaldato a 800° sia dovuto alla cristallizzazione della silice amorfa.

Lo spettro (Tav. II) rivela la contemporanea presenza di α-cristobalite che non subisce inversione nel raffreddamento del prodotto cotto a 800°.

Campioni VI, VII, VIII. — Contengono tutti cristobalite nella forma α accanto a quantità più o meno notevoli di β e per alcuni, di tridimite. (Nella tav. II sono riportati gli spettri dell'opale VIII prima e dopo il riscaldamento a 800° e quello dell'opale VI).

Le ricerche dilatometriche e röntgenografiche di cui abbiamo dato conto nel corso della Nota confermano quanto era stato antecedentemente constatato da Levin e Ott sulla possibilità della esistenza negli opali delle due forme: α e β della cristobalite.

Si è esaminato l'effetto del trattamento termico fino a 800° sulle eventuali variazioni del contenuto di cristobalite e del rapporto: α / β, e si è trovato che in alcuni casi il riscaldamento provoca il passaggio dell'α-cristobalite metastabile contenuta nell'opale, in cristobalite invertibile ($\alpha \rightleftarrows \beta \sim 230°$).

In altri casi il trattamento termico non influisce sul contenuto originario di α-cristobalite; il riscaldamento a 800° non è capace cioè di eliminare o comunque di ridurre quelle resistenze passive che permettono il permanere a temperatura ordinaria dell'α-cristobalite medesima.

L'esistenza specie dell'α-cristobalite, negli opali, non trova a tutt'oggi una interpretazione soddisfacente.

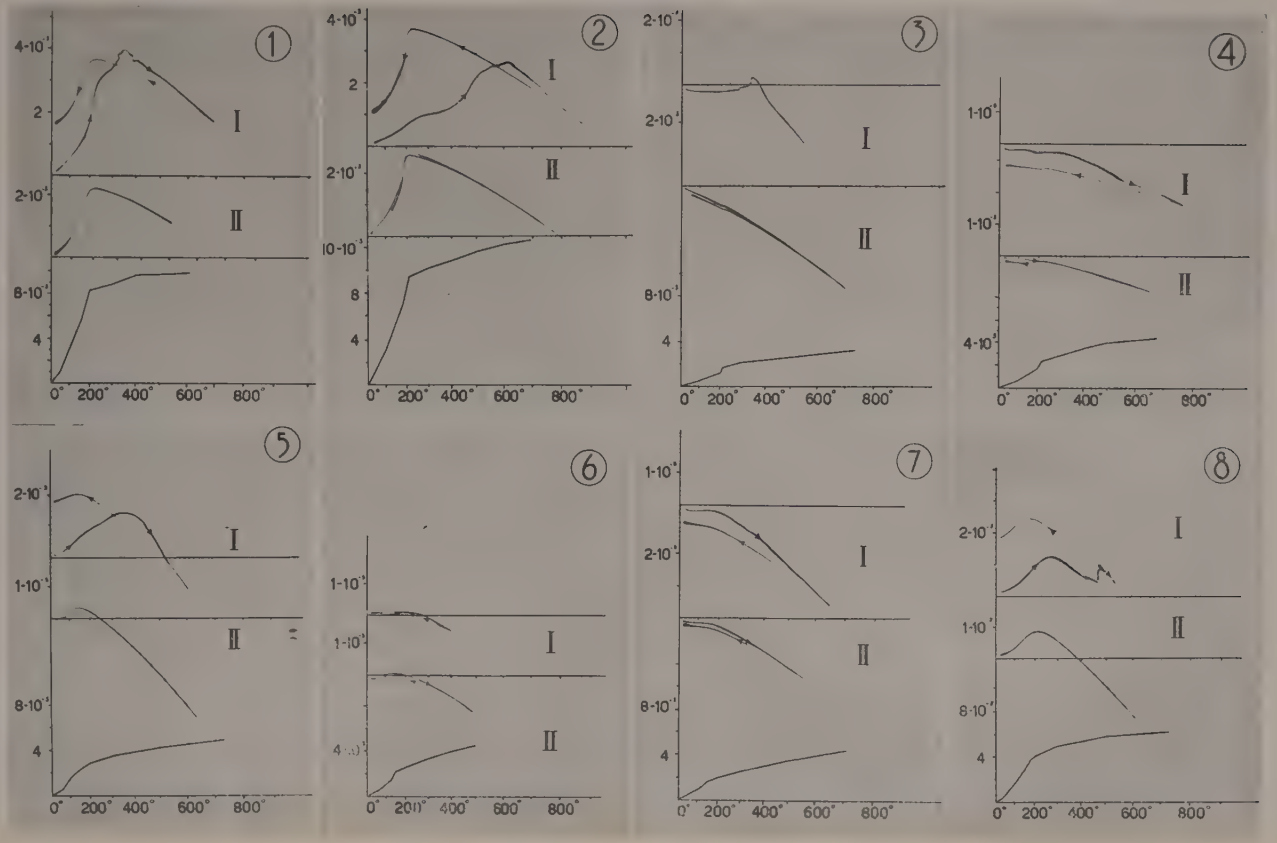
Per spiegare l'esistenza di α-cristobalite in certi vetri parzialmente devetrificati, Greig [1]) ammette che causa la presenza del magma vetroso inglobante i cristalli di cristobalite, si generino, durante il raffreddamento, delle tensioni fra vetro e cristallo efficienti al fine di impedire la trasformazione.

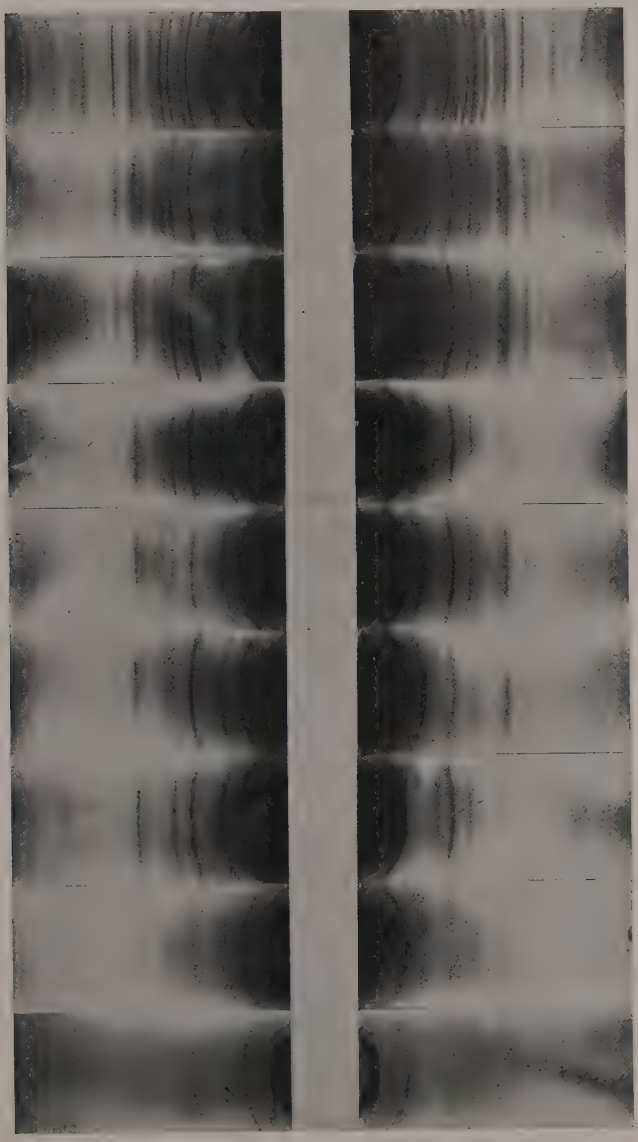
Secondo Levin e Ott (loc. cit.) la silice amorfa che costituisce la massa fondamentale degli opali, potrebbe agire nello stesso senso. Ci sembra tuttavia che l'interessante quesito richieda per la sua chiarificazione il contributo di ulteriori ricerche.

Facciamo rilevare in fine che non tutti i campioni di opale da noi presi in esame hanno fornito sia ai raggi X, sia all'esperienza termodilatometrica, la prova della presenza di cristobalite. Ad esempio, della jalite, cortesemente fornitaci dall'Ecc. Prof. Millosevich, si è mostrata totalmente amorfa.

---

[1]) Journ. Am. Chem. Soc. *54*, 2846 (1932).


1
2
3
4
5
6
7
8
I
II
0° 200° 400° 600° 800°



β-cristobalite

Opale I

Opale II
dopo riscaldam.
a 800°

Opale II

Opale VIII

Opale VIII
dopo riscaldam.
a 800°

Opale V
dopo riscaldam.
a 800°

Opale III

Opale VI

Variazioni di altezza della Cromosfera Solare.

Nota del dr. **Tito Nicolini**, *presentata dal socio* **L. Carnera.**

(Adunanza del dì 5 aprile 1941 - XIX)

Sunto. — Usando le serie di misure d'altezza cromosferica di Arcetri e di Catania, si esamina la variazione d'altezza negli anni successivi e la variazione di profilo in prossimità dei massimi e minimi d'attività solare. Risulta ancora con evidenza una oscillazione a periodo annuo dell'altezza stessa, la cui interpretazione deve naturalmente considerarsi estranea alla fisica solare. Si esprime la desiderabilità di serie di misure più numerose e più fitte della cromosfera, in modo da poter disporre del profilo accurato di questo importante elemento nelle varie fasi dei cicli solari.

Serie di misure d'altezza della cromosfera solare sono condotte regolarmente all'Osservatorio di Arcetri dal settembre 1921 ed a quello di Catania dall'ottobre 1922; precisamente si misura allo spettroscopio disposto con la fessura normale al bordo solare l'altezza della riga rossa H_α invertita al bordo stesso.

Quantunque dall'inizio di queste serie regolari, e di altre meno continue, non siano ancora trascorsi due periodi undecennali dell'attività solare, appare già tuttavia da quanto segue l'utilità di dare uno sguardo complessivo ai risultati. D'altronde si ha già in proposito qualche cognizione abbastanza soddisfacente. Respighi già notò dal 1869 [1]) una maggiore altezza della cromosfera presso i poli, e lo stesso fatto fu confermato dal Secchi nel 1875. Un esame più approfondito fu fatto da G. Abetti nel 1926 [2]), e furono messe in luce, allora e successivamente, le circostanze fondamentali: durante i periodi di attività minima l'altezza della cromosfera ai poli risulta circa 1″ maggiore che all'equatore: durante l'attività massima, l'altezza media cromosferica risulta maggiore, ma uniformemente distribuita alle varie latitudini eliografiche.

Le serie di misure di Arcetri, pubblicate annualmente, dànno l'altezza di 30° in 30° di latitudine eliografica per tutti i giorni d'osservazione, e quindi le medie annuali, di 30° in 30° come detto. Nella presente nota si è esclusa naturalmente la considerazione delle protuberanze, come pure

[1]) « *Sulle osservazioni spettroscopiche, ecc.* », Atti R. Acc. Linc., Sess. I, 5 dic. 1869, e Sess. VI, 5 mag. 1872.

[2]) « *Sull'altezza della cromosfera solare* », Rend. Acc. Linc., vol. III serie 6ª, p. 140.

dei pochi valori eccessivamente discordanti, come 15″ o maggiori, già attribuibili a perturbazioni cromosferiche locali. I valori dei primi cinque anni della Tabella I, sono stati interpolati da quelli dati dalle pubblicazioni di Arcetri, che per detti anni si riferivano a latitudini leggermente sfasate rispetto ai successivi. I numeri della Tabella II sono stati calcolati eseguendo le medie numeriche mensili, non pubblicate, per i 19 anni considerati, e arrotondando giorno per giorno ai secondi le altezze date; però nei mesi con 3 giorni o meno d'osservazione (cioè con 36 misure o meno) si è tenuto conto anche dei decimi di secondo. Le Tabelle III e IV riportano gli stessi elementi fondamentali per Catania, che fornisce nelle relazioni annue l'altezza media giornaliera per tutti i giorni d'osservazione, le medie mensili, e dal 1933 le medie annue di 45° in 45° di latitudine eliografica. La Tabella III è incompleta non essendo ricavabili dalle relazioni annue i dati non inclusi.

Dalle tabelle e dai grafici dedotti, appresso riportati, risultano intanto chiari i fatti già noti ed accennati. Assumendo per valutazione numerica dell'attività solare i *numeri relativi di* Wolf *osservati* quali risultano dalle *Astronomische Mitteilungen* di Zurigo, le epoche di massima attività risultano fissate al 1928.4 e 1937.4, quelle di minima al 1923.6 e 1933.8. Si vede altresì che l'andamento dell'attività è più prossimo al massimo valore negli anni 1925-26-27-28-29 e 1936-37-38-39; più prossimo al minimo negli anni 1921-22-23-24 e 1930-31-32-33-34-35. Raggruppati gli anni considerati in queste due classi (eccettuati il 1921 per Arcetri e il 1922 per Catania, trattandosi delle prime e molto scarse osservazioni), risultano allora in prossimità dei massimi le medie indicate M, in prossimità dei minimi le indicate *m* (ultime due righe delle Tabelle I e III). I valori medi di queste medie sono 10″.30 e 10″.07 (differenza 0″.23) per Arcetri; 9″.81 e 9″.24 (differenza 0″.57) per Catania. La differenza invece tra l'altezza polare e la equatoriale in prossimità dei minimi risulta, ancora dall'ultima riga delle tabelle I e III, 0″.75 per Arcetri e 0″.80 per Catania; esattamente ai minimi di attività dovrebbe risultare ancora maggiore, ma per avere risultati numerici di buon affidamento occorrono più lunghe serie d'osservazioni. È ad ogni modo assai evidente dai primi due diagrammi l'andamento uniforme del profilo cromosferico in prossimità dei massimi, e l'andamento ragolarmente oscillante (con la latitudine eliografica) in prossimità dei minimi.

Il 3° diagramma esprime invece, come l'ultima riga delle Tabelle II e IV un fatto sorprendente e forse non ancora rilevato, cioè che *l'altezza della cromosfera ha una regolare oscillazione apparente di periodo annuo.* Questa oscillazione sinusoidale è detta qui *apparente*, dovendosi escludere che la fenomenologia intrinseca solare possa avere qualche relazione con un periodo esattamente annuo. La spiegazione di questa imprevista apparenza dovrebbe risiedere piuttosto in fatti riguardanti l'atmosfera terre-

TABELLA I. — *Altezza della cromosfera per varie latitudini eliografiche secondo le osservazioni di Arcetri (unità 1").*

Lat. eliogr. / Anni	N			E			S			W		
	+ 90°	+ 60	+ 30	0	− 30	− 60	− 90	− 60	− 30	0	+ 30	+ 60°
1921	9.5	9.2	8.9	9.1	9·3	9.4	9.8	9.7	9.3	9.2	9.1	9.3
22	10.0	9.7	9.4	9.4	9.6	10 2	10.6	10.2	9.9	9.9	9.7	9.9
23	9.9	9.6	9.1	9.2	9.3	9.7	10.1	9.8	9.5	9.6	9.5	9.7
24	9.3	9.2	9.2	9.1	9.3	9.6	9.8	9.7	9.4	9.3	9.5	9.5
1925	9.2	9.2	9.2	9.1	9.2	9.4	9.6	9.5	9.3	9.3	9.5	9.4
26	10.8	10.0	10.8	10.8	10.8	10.7	10.9	10.7	11.0	10.8	10.9	10.5
27	10.4	10.0	10.5	10.3	10·4	10.4	10.2	10.3	10.6	10.5	10.3	9.9
28	10.0	9.7	10.3	10.1	10.2	10.1	10.1	10.2	11·2	10.3	10.3	10.1
29	10.3	10.4	10.2	10.0	10.1	10.2	10.5	10.5	10.6	10.4	10.6	10.5
1930	10.6	10.2	10.2	10.1	10.0	10.2	10.6	10.4	10.3	10.4	10.3	10.1
31	10.7	10.0	9.7	9.6	9.6	9.7	10.3	9.8	9.5	9.6	9.8	9.9
32	11.3	10.4	9.9	9.7	9.9	10.1	10.7	10.5	9.9	9.9	9.9	10.4
33	11.7	11.0	10.3	10.5	10.4	10.9	11.2	10.7	10 0	10.2	10.5	10.8
34	11.3	10.8	10.4	10.2	10.3	10.6	10.9	10.5	10.0	9.8	10.0	10.5
1935	10.8	10.4	10.0	10.0	10.2	10.3	10.6	10.3	10.4	10.2	10.1	10.1
36	11.1	10.5	10.5	10.2	10.6	10.4	10.6	10.5	10,7	10·4	10.8	10.7
37	10.6	10.5	10.4	10.4	10.7	10 7	10.6	10.6	10.5	10.4	10.4	10.4
38	10.3	10.1	10.2	10 3	10.5	10.4	10.2	10.3	10.4	10.4	10.3	10.4
1939	10 4	10.6	10.4	10.4	10.4	10.4	10.6	10·4	10.4	10.4	10.3	10.4
Media M	10,34	10.11	10.28	10.18	10.32	10.30	10,37	10.33	10.41	10.32	10.38	10.26
Media *m*	10.62	10.14	9·80	9.77	9.84	10.14	10.53	10.21	9.88	9.88	9.92	10.10

TABELLA II. — *Altezza della cromosfera per i vari mesi secondo le osservazioni di Arcetri (unità 1").*

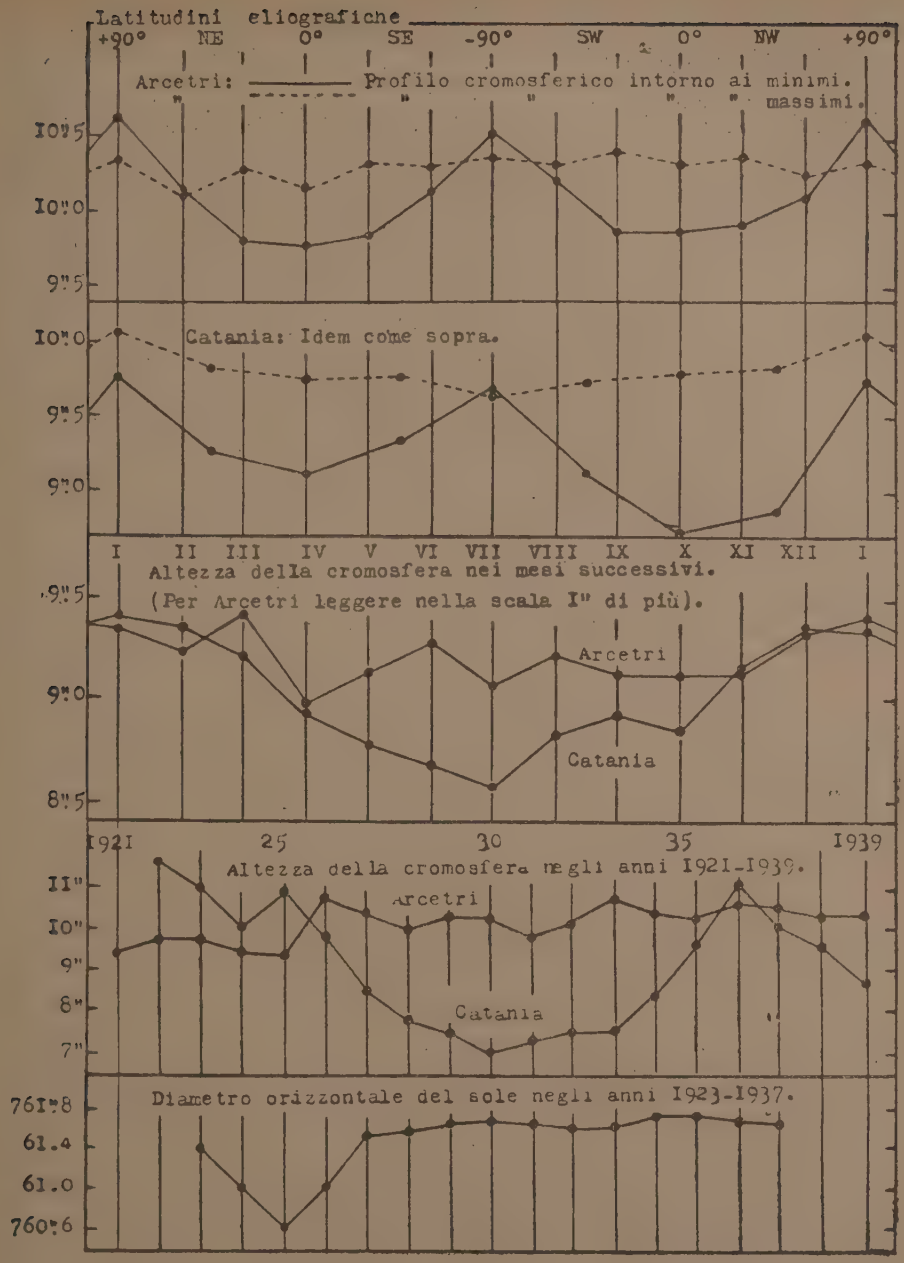
Mesi / Anni	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Medie
1921	—	—	—	—	—	—	—	—	9.3	8.9	9.5	10.0	9.42
22	9.2	9.9	10.6	9.6	9.8	10.3	—	9.3	8.9	9.4	9.9	10.5	9.76
23	10.5	11.2	9.6	9.6	9.5	9.5	9.3	—	9.4	9.5	9.6	9.5	9.75
24	10.1	9.5	9.5	9.0	9.2	9.3	9.1	9.6	9.6	9.9	9.3	9.7	9.48
1925	9.7	9.4	9.2	9.2	9.3	9.2	9.5	9.2	—	—	—	—	9.34
26	10.9	11.1	10.9	10.2	11.4	10.9	10.7	10.8	10.6	10.6	10.5	10.7	10.78
27	10.6	11.1	11.0	10.1	10.4	10.7	10.1	10.5	10.0	10.2	10.4	10.1	10.43
28	10 6	10.1	9.9	10.1	10.0	10.2	9.9	10.2	10.0	9.8	10.1	10.2	10.09
29	10.4	10.1	10.4	10.0	10.3	10.3	9.9	11.2	10.9	10.2	9.5	10.8	10.33
1930	10.5	10.1	10.1	10.3	10,7	10.2	9.8	10.5	10.0	10.4	—	10.3	10.26
31	9.8	10.1	9.4	9.4	9.8	9.7	9.7	10.1	9.8	10.1	10.4	10.1	9.87
32	10.4	10.3	10.0	10.7	9.9	10.0	10.2	10.1	10.0	10.6	10.3	10.0	10.22
33	10.8	10.8	10.4	10.6	10.6	11.3	10.5	10·7	11.1	11.2	10.7	10.3	10.75
34	10.5	10.1	10.4	10.4	10.4	10.6	10.6	10.0	10.7	10.5	10.0	10.7	10.41
1935	10.5	10.2	10.4	9.3	10.3	10.2	9.9	10.5	10.6	10.3	10.6	10.4	10.27
36	—	10.4	10.9	10.4	10.3	11.3	10.7	10.3	10.4	10.6	10.8	10.6	10.61
37	10.8	10.6	—	10.7	10.6	10.6	10.5	10.4	10.4	9.8	10.2	11.5	10.55
38	10·8	10.7	10.6	9.9	10.2	10.3	10.2	10.0	10.3	10.3	10.1	10.5	10.33
1939	10.8	10.7	10.4	9.9	9.8	10.7	10.6	10.3	10.3	9.9	10.3	10.6	10.36
Medie	10.41	10.36	10.22	9.97	10.14	10.29	10.07	10.22	10 13	10.12	10.13	10.36	

TABELLA III. — *Altezza della cromosfera per varie latitudini eliografiche secondo le osservazioni di Catania (unità 1").*

Lat. eliogr. / Anni	N		E		S		W	
	+ 90°	+ 45	0	— 45	— 90	— 45	0	+ 45
1922	12.4	13.0	12.2	12.4	12.7	12.9	12.2	12.6
23	11.3	11.0	10.9	10.9	11.0	10.8	10.7	10.8
24	9.9	10.1	10.1	9.9	10.1	9.8	9.8	9.9
1926	10.0	9.7	9.7	9.6	9.8	9.6	9.5	9.6
1933	7.8	7.6	7.6	7.6	7.7	7.6	7.2	7.0
34	9.1	8.0	7.9	8.4	8.9	8.0	7.9	7.9
1935	10.7	9.6	9.1	9.9	10.8	9.4	8.1	8.8
36	12.1	11.7	10.7	10.6	11.1	11.2	11.2	11.2
37	10.1	10.5	10.1	10.2	10.1	10.3	9.9	10.2
38	9.5	9.5	9.6	9.8	9.7	9.9	9.5	9.7
1939	8.6	8.7	8.7	8.7	8.6	8.6	8.9	8.5
Media M	10.06	9.82	9.76	9.78	9.66	9.74	9.80	9.84
Media *m*	9.76	9.26	9.12	9.34	9.70	9.12	8.74	8.88

TABELLA IV. — *Altezza della cromosfera per i vari mesi secondo le osservazioni di Catania (unità 1").*

Mesi / Anni	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Medie
1922	—	—	—	—	—	—	—	—	—	9.5	12.0	13.7	11.73
23	13.9	12.8	12.9	12.3	10.6	9.4	9.4	8.4	10.2	10.3	11.3	10.6	11.01
24	10.8	10.8	10.5	11.1	10.5	9.8	9.4	9.4	9.8	9.5	10.0	10.1	10.14
1925	10.5	11.3	10.5	10.8	10.9	10.8	11.3	11.7	11.0	10.5	10.6	11.4	10.94
26	10.5	10.9	10.9	9.5	9.2	9.5	9.0	10.6	9.8	10.2	9.3	8.9	9.86
27	11.3	10.2	10.0	8.9	8.8	7.9	7.2	7.9	8.2	7.3	6.4	7.4	8.46
28	7.9	7.1	6.7	6.4	6.8	7.5	8.2	8.3	8.1	8.4	8.9	8.8	7.76
29	8.4	8.0	7.7	7.2	7.1	6.9	6.7	7.7	7.4	6.9	7.4	7.4	7.40
1930	7.5	6.8	7.1	6.8	7.2	7.2	7.0	7.0	7.1	7.0	7.2	7.3	7.10
31	7.2	7.3	7.4	7.4	7.2	6.9	7.1	7.3	7.1	7.4	7.5	7.5	7.28
32	7.5	7.3	7.5	7.3	7.2	7.4	7.5	7.3	7.4	7.5	7.5	7.8	7.43
33	7.7	7.6	7.7	7.5	7.5	7.5	7.4	7.6	7.5	7.0	7.5	7.4	7.49
34	6.7	7.1	8.2	8.0	8.0	8.7	8.0	9.3	9.2	9.1	9·3	8.5	8.34
1935	9.2	9.3	10.1	9.5	9.3	8.7	9.1	9.3	9.7	10.5	10.8	10.8	9.69
36	10.2	11.5	11.3	11.7	11.5	11.7	11·0	11.6	11.4	10.6	10.8	12.0	11.19
37	11.6	11.3	11.8	10.0	10.0	9.9	9.8	9.5	9.5	9.5	10.1	9.3	10.19
38	9.8	9.8	10.1	9.3	9.4	9.6	9.7	10.2	9.9	9.0	8.7	10.3	9.65
1939	8.3	8.2	9.9	8.3	8.1	8.2	8.1	8.2	8.7	9.1	9.7	9.4	8.68
Medie	9.35	9.24	9.42	8.93	8.77	8.68	8.57	8.83	8.93	8.85	9.17	9.37	


Latitudini eliografiche
+90° NE 0° SE -90° SW 0° NW +90°
Arcetri: Profilo cromosferico intorno ai minimi.
" " massimi.
10"5
10"0
9"5
Catania: Idem come sopra.
10"0
9"5
9"0
I II III IV V VI VII VIII IX X XI XII I
Altezza della cromosfera nei mesi successivi.
(Per Arcetri leggere nella scala I" di più).
9"5
9"0
8"5
Arcetri
Catania
1921 25 30 35 1939
Altezza della cromosfera negli anni 1921-1939.
11"
10"
9"
8"
7"
Arcetri
Catania
Diametro orizzontale del sole negli anni 1923-1937.
761"8
61.4
61.0
760"6

stre, o la rivoluzione annua, o le condizioni d'osservazione [3]). L'oscillazione appare notevolmente più pronunciata e regolare per Catania che per Arcetri; ad ogni modo anche per questo Osservatorio, l'altezza media per i mesi da gennaio a marzo e da ottobre a dicembre risulta 10″.27, per i mesi da aprile a settembre risulta 10″.14, e dato il numero già grandissimo di misure la differenza non potrebbe attribuirsi a deviazione accidentale. Del resto l'ampiezza e la regolarità d'oscillazione per Catania superano ogni pensabile effetto di scarti accidentali; nè può avanzarsi dubbio sull'accuratezza (entro i limiti possibili) delle osservazioni, eseguite da G. A. Favaro, L. e S. Taffara, C. Strano e lo scrivente.

Nel 4.° diagramma le osservazioni di Catania rivelano ancora una oscillazione dell'altezza media della cromosfera in anni successivi (ultima colonna della Tabella IV); questa oscillazione dev'essere connessa al ciclo undecennale di attività, ma occorre seguirne l'andamento più a lungo per fissarne le caratteristiche. Sembra intanto che la massima altezza della cromosfera si verifichi approssimativamente a metà dell'intervallo tra un minimo ed il seguente massimo, e la minima a metà dell'intervallo tra un massimo ed il seguente minimo. È da notare il fatto che le osservazioni di Arcetri non esibiscono quest'effetto, sembrando al contrario negare una oscillazione; in esse l'unico salto sensibile, dal 1925 al 1926, si è verificato in seguito alla sostituzione dell'obiettivo Zeiss di 36 cm. di apertura al vecchio di 28 cm. dell'equatoriale Amici usato nelle misure.

Volendo dare qualche rappresentazione approssimata delle curve disegnate con le solite espressioni sinusoidali semplici, l'altezza cromosferica intorno ai minimi sarà

$$h = 10''.1 - 0''.3 \cos 2\varphi \text{ per Arcetri}$$
$$h = 9''.2 - 0''.4 \cos 2\varphi \text{ per Catania}$$

essendo φ la latitudine eliografica, e prescindendo da una piccola correzione di fase.

Pel 4.° diagramma, usando le medie Arcetri-Catania, t rappresentando gli anni trascorsi dal 1928.4 (massimo d'attività), ed assumendo un periodo d'oscillazione di anni 11.5, si può dare la rappresentazione:

$$h = 9''.3 + 0''.8 \cos (31\, t + 105)^0.$$

Ma queste rappresentazioni sono imprecise e premature.

Il 5° diagramma è riportato unicamente a titolo di confronto, e dà le

---

[3]) Un effetto atmosferico stagionale appare più naturale. Come giustamente osserva il prof. Carnera, sarebbe facile accertarsene se si disponesse di qualche serie osservativa dell'emisfero sud.

misure del diametro orizzontale solare ottenute all'Osservatorio di Roma. Non appare una relazione sicura tra il diametro solare e l'altezza della cromosfera. Ad ogni modo entro l'inevitabile incertezza le variazioni dei due elementi sembrerebbero procedere in senso inverso. I risultati dell'Osservatorio di Roma, dovuti al prof ARMELLINI, sono ridotti all'inizio di ogni anno; agli effetti del presente confronto, ciò non ha importanza.

Appare già dalle brevi considerazioni esposte l'importanza del lavoro già effettuato ad Arcetri e Catania, e la desiderabilità di serie di misure più numerose e più fitte dell'altezza cromosferica. Infatti per poco che vi si rifletta si comprenderà che il profilo cromosferico in una sezione meridiana generica del sole è una caratteristica importante dell'equilibrio o dell'attività solare, certo non meno importante dei conteggi usuali o delle valutazioni d'area delle macchie e delle protuberanze; e quindi appare l'utilità di averne cognizione adeguata e non troppo sommaria. Con più serie di misure omogenee e fitte della cromosfera, per esempio al più ad intervalli di 15° (anzichè di 30 o di 45 come finora effettuate) sarebbe possibile averne il profilo con continuità ed accuratezza, e i risultati potrebbero anche costituire un desiderabile complemento alle *Immagini spettroscopiche del bordo solare* pubblicate dall'Osservatorio di Arcetri.

La latitudine della Specola di Capodimonte.

Nota del socio **Luigi Carnera.**

(Adunanza del dì 5 aprile 1941 - XIX)

Sunto. — Rimandando per tutti i dettagli ad altra Memoria, pubblicata fra le Memorie della R. Accademia d'Italia, si espongono i risultati di una revisione e discussione di tutte le misure di latitudine fatte alla Specola di Capodimonte, concludendo il valore, che oggi è lecito ritenere come il più attendibile.

In seguito a richiesta avuta dall'Istituto Geografico Militare di Firenze, di indicare il valore più attendibile della latitudine di questa Specola, perchè da essa sono state tratte molte delle coordinate della rete fondamentale italiana, ho ritenuto fosse giunto per me il momento di attuare un vecchio proposito, di riesaminare cioè accuratamente i molti lavori, che fin dall'epoca della fondazione e del suo primo direttore, sono stati fatti a tal fine. Dopo Carlo Brioschi hanno dedicato, per quasi un trentennio, anni ed anni di lavoro Emanuele Fergola, Arminio Nobile, Filippo Angelitti e Francesco Contarino, ma fino ad ora non si era ancor pensato di sottoporre i valori trovati da essi ad una critica, atta a renderli fra loro paragonabili, indagandone nel tempo stesso la loro precisione ed attendibilità. Ed a spingermi a tale lavoro, oltre che l'accennata richiesta, vi era pure un'altra ragione: quella di chiarire la natura di quelle supposte variazioni di latitudine, che secondo il Nobile e l'Angelitti avrebbero potuto raggiungere entità tali da sorpassare di quattro o cinque volte i valori massimi trovati altrove, e che appunto per questo ebbero a lasciare scettici gli astronomi ed i geodeti di allora, e fecero passare quasi come inosservati i lavori qui compiuti.

Onde rendere paragonabili fra di loro i diversi risultati, ottenuti in epoche successive e con metodi diversi, era necessario anzitutto dare a tutte le osservazioni una base unica ed uniforme, assumendo per esse un sistema unico di coordinate stellari, e più particolarmente di declinazioni. Fortunatamente quasi tutte le stelle osservate sono comprese nel F. K. 3., che rappresenta quanto di più sicuro attualmente possediamo. Ritenni quindi dovermi riferire a questo, adottando le corrispondenti declinazioni ed i moti propri. Nei pochi casi in cui quel catalogo risultava insufficiente ricorsi al G. C. di Boss, riducendo però poscia le posizioni al sistema del F. K. 3. Era poi ancora necessario, come ho già accennato, procedere ad un esame accurato di tutti i lavori, per accertare l'esistenza di errori sistematici e

per determinare la precisione dei risultati in guisa del tutto omogenea: di questo complesso lavoro è data una relazione estesa e dettagliata nelle Memorie della R. Accademia d'Italia; non ritengo però del tutto inutile un brevissimo riassunto, con i risultati conchiusi anche nei Rendiconti di questa Accademia, pensando che essa accolse fra le proprie pubblicazioni buona parte dei lavori del Fergola, del Nobile e dell'Angelitti.

Risulta dunque, che rielaborate quelle osservazioni con i nuovi elementi si riducono sensibilmente i disaccordi fra le diverse determinazioni, tanto da vederle comprese il più delle volte, entro i limiti degli errori attendibili per i singoli valori. Così mentre paragonando la latitudine del Brioschi con quella ottenuta nel 1871, il Fergola aveva scorto un indizio di una variazione di carattere secolare, (ed era stato ancora confermato in questa supposizione dal valore ottenuto posteriormente, rettificando le declinazioni di alcune stelle osservate in quell'occasione, da sentirsi indotto a proporre, nel 1884, alla Riunione dell'Associazione Geodetica Internazionale tenuta a Roma, la creazione di un vero e proprio servizio internazionale permanente per lo studio delle variazioni delle latitudini) ora non troviamo che differenze che rientrano entro i limiti degli errori attendibili. E su per giù lo stesso avviene per le variazioni che il Nobile aveva creduto poter dedurre dalle proprie osservazioni, e che riteneva avessero il periodo di un anno. Per le osservazioni del Nobile fatte nei primi anni, e che sembravano indicare variazioni sensibilissime, era però necessario eliminare dai risultati l'errore sistematico molto notevole derivante dalla giacitura dello strumento, errore che lo stesso Nobile ebbe a trovare più tardi; per tutte poi influiva pur notevolmente la poca precisione delle declinazioni. E poichè negli anni successivi e su per giù alle stesse epoche venivano riosservate le stesse stelle, senza stabilire mai un collegamento a catena fra i diversi programmi di osservazione, che si succedevano nel corso dell'anno, era ben naturale, che gli errori delle declinazioni dovessero ripresentarsi integralmente ed identicamente nello stesso periodo di ciascun anno e da ciò avessero origine quelle supposte variazioni a periodo annuo. Ma proprio sono le osservazioni stesse del Nobile che mostrano, come egli proseguendo nelle indagini a poco a poco sia riuscito ad eliminare le fonti di errori sistematici di natura strumentale e personale, e con ciò a contenere le differenze fra i singoli valori entro limiti così stretti da far trasparire nell'ultima memoria del 1891 dubbi sulle conclusioni da lui dianzi annunciate.

Scarti notevoli nei singoli valori, che contrastano con l'attendibile precisione, mostrano pure le latitudini ricavate da osservazioni in primo verticale dall'Angelitti: ma anche per queste, a prescindere da un sensibile errore sistematico dovuto alla giacitura strumentale, analogo del resto a quello che ebbe a trovare più tardi il Millosevich nelle sue osservazioni a Monte Mario, bisogna ricordare le condizioni ambientali poco propizie, in

cui vennero fatte quelle osservazioni, e ritenere pertanto che debbano aver risentito notevolmente per anomalie refrazionali locali. Non ostante ciò si può concludere pure da esse un valore, che si inquadra bene con tutti gli altri.

Ma la serie più preziosa di osservazioni risulta quella iniziata dal Fergola nel 1893 e proseguita fino al 1898 per opera di Angelitti e Contarino, comprendente oltre 4500 determinazioni fatte col telescopio zenitale, fatto costruire espressamente dal Fergola per tale scopo a Berlino. Non è qui il caso di ripetere nei dettagli la discussione di quel ricco materiale: dirò solo che comprendendo il periodo delle osservazioni quasi esattamente un multiplo del periodo chandleriano, si può ritenere che il valore medio globale ci dia la latitudine proprio riferita alla posizione del Polo medio.

I valori dedotti dalle diverse serie di osservazioni nelle diverse epoche sono i seguenti:

	Autore	Strumento	Epoca	Latitudine	e. m.	Peso
1.	C. Brioschi	Cerchio rip.	1820	40° 51′ 46″.53	± 0″.50	0.1
2.	C. Brioschi	Cerchio rip.	1821	46 .19	± 0 .16	1.0
3.	E. Fergola	Cerchio rip.	1871	45 .85	± 0 .05	10.0
4.	A. Nobile	Cerchio mer.	1883-90	45 95	± 0 .15	1.0
5.	F. Angelitti	Str. pass. I vert.	1889	46 .16	± 0 .18	1.0
6.	F. Angelitti	Cerchio mer.	1894	45 .92	± 0 .05	10.0
7.	E. Fergola F. Angelitti F. Contarino	Strum. Zenit.	1893-8	45 .97	± 0 .04	15.0

dai quali si può concludere quale media pesata il valore seguente per la latitudine della specola di Capodimonte (centro dei due cupolini geodetici).

$$\varphi = 40^{\circ}\ 51'\ 45''.96$$

Capodimonte, 4 marzo 1941 - XIX.

Calcolo statico di prismi costituiti da materiali che non seguano la legge di Hooke

Nota del prof. **Franco Jossa**, *presentata dal socio* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 7 giugno 1941 - XIX)

Sunto. — Si studiano le modalità del calcolo statico dei prismi costituiti da materiali per i quali le tensioni o pressioni interne siano legate alle dilatazioni da legge non lineare.

Si considera specialmente la sollecitazione a flessione, con o senza sforzo normale.

Si risolve in modo esatto il problema della determinazione del centro di spinta e dello sforzo normale corrispondenti ad asse neutro ed a raggio di curvatura assegnati; poi si indica il modo di coordinare i tentativi necessarî per risolvere il problema inverso, con speciale riguardo al caso particolare della flessione pura.

I risultati ottenuti per una data sezione vengono utilizzati per sezioni ad essa affini, con opportuno computo dell'influenza del rapporto di affinità.

Si passa poi all'esame delle deformazioni, ed allo studio della determinazione delle incognite iperstatiche, proponendo alcuni metodi che risolvono il problema per iterazione. In qualche caso pratico vengono indicate, a titolo di esempio, le operazioni da compiere.

I. — *Posizione generale del problema.* — Oggetto della presente nota è lo studio statico di solidi prismatici costituiti di materiale per il quale non è verificata la legge di proporzionalità tra tensioni e deformazioni.

Tale studio, nelle pagine che seguono, viene sviluppato in relazione alle sollecitazioni di sforzo normale e di flessione, coesistenti o non; alle deformazioni da esse prodotte; alla determinazione di incognite iperstatiche.

La posizione principale è che il modulo di elasticità E non è più una costante, ma varia col valore di ε. Tracciata quindi la curva σ, ε dovremo considerare variabile, in quanto segue, il modulo E, da punto a punto della curva [1]).

---

[1]) È opportuno chiarire che, in corrispondenza di un determinato punto della curva σ, ε, possono considerarsi un E istantaneo e un E medio. L'E istantaneo è definito dalla

$$E_{ist} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$

essendo σ ed ε i valori nel punto che si considera, ed è rappresentato dalla tangente trigonometrica dell'angolo che la tangente geometrica alla curva nel punto

Consideriamo, sul solido prismatico in esame, l'esistenza di sole tensioni normali σ; e manteniamo l'ipotesi che, nella deformazione, le sezioni si conservino piane. In una sezione di forma qualsiasi, simmetrica rispetto ad un asse y, sia x, normale ad y, l'asse neutro; sarà ancora:

$$\varepsilon = \frac{y}{r}. \qquad [1]$$

E si avrà

$$N = \int_A \sigma dA = \int_A E_t \frac{y}{r} dA$$

$$M = \int_A \sigma y dA = \int_A E_t \frac{y^2}{r} dA.$$

La sollecitazione su un elemento di area non è più, come di solito, proporzionale al momento statico dell'elemento rispetto all'asse neutro perchè la σ non è più proporzionale alla y. Non esiste quindi neppure più la relazione di antipolarità tra centro di pressione e asse neutro.

Occorre quindi ricercare, nel caso in esame, nuove relazioni che leghino le caratteristiche delle forze esterne alle tensioni interne. A tale scopo è opportuno procedere ad uno studio preliminare relativo a una sezione generica.

II. — *Studio di una sezione di forma generica sollecitata a sforzo normale e flessione.* — Supponiamo di fissare il valore del raggio di curvatura r. Se ora fissiamo anche ε p. es. in A, punto su y più lontano dall'asse x, e quindi la relativa σ, verranno determinati, per la [1], la posizione dell'asse neutro nonchè il valore di tutte le ε e σ, e tra le altre di quelle in B, punto su y più lontano dall'asse x da parte opposta di A. Eseguiamo poi, per via grafica o per via analitica, gli integrali delle quantità $\sigma b dy$ dei due segni. Tali somme delle forze elementari di segno opposto non saranno in generale eguali, onde vi sarà una risultante degli sforzi interni applicata in un

---

σ, ε fa con l'asse x. L'E medio a partire dall'origine, per cui è $\varepsilon = 0$, o E originario, è invece definito dalla

$$E_{0m} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

cioè dalla tangente trigonometrica dell'angolo che la congiungente il punto σ, ε con l'origine fa con l'asse x; analogo significato si può dare all'E medio in un determinato intervallo.

L'E che compare nelle espressioni che seguono è, quando non sia detto il contrario, il medio originario.

punto X di immediata determinazione. Il diagramma delle σ così determinato corrisponderà quindi ad una sollecitazione di sforzo normale eccentrico, nel quale la forza esterna sia applicata in X ed abbia una determinata grandezza N. Poichè alla ε_A potranno darsi valori diversi, p. es. fino al limite di elasticità, ai diversi valori delle σ corrisponderanno diverse posizioni del punto X, e diversi valori delle N.

Per la sezione così studiata, si può pensare ad individuare una corrispondente sezione virtuale, per la quale si verifichino le normali relazioni proprie della flessione e dello sforzo normale. In regime di proporzionalità si avrebbe:

$$\sigma = E^* \varepsilon$$

con E^* costante; nel caso in esame si ha invece, come si è detto:

$$\sigma_\varepsilon = E_\varepsilon \varepsilon$$

con E_ε funzione di ε. È allora

$$\sigma_\varepsilon = \sigma \frac{E_\varepsilon}{E^*} \qquad [2]$$

Per una determinata sezione, ed in una striscia di piccola altezza, parallela all'asse x, può ritenersi costante E_ε: per tale striscia il rapporto $\frac{E_\varepsilon}{E^*}$ ha dunque un valore determinato. Esso può assumersi come un coefficiente che affetti tale striscia, che, per esempio, ne moltiplichi la larghezza. Si può dunque costruire una nuova sezione, virtuale, ottenuta da quella reale modificando le larghezze delle singole strisce come ora si è detto. Con tale trasformazione vigeranno ancora, per la sezione virtuale, le note relazioni tra forze esterne e tensioni interne.

Come conseguenza, ne risulta una modificazione del momento di inerzia. Si può infatti scrivere:

$$I^* = \frac{1}{E^*} \int E_\varepsilon y^2 dA. \qquad [3]$$

In tale espressione si può assumere per E^*, se per esempio il materiale che si studia presenta un periodo sia pur breve di proporzionalità, l'E relativo a tale periodo; ovvero un E qualsiasi, per esempio quello relativo alla σ_{max} di trazione o di compressione.

Si può allora scrivere:

$$M = \frac{I^* E^*}{r}$$

espressione analoga e corrispondente a quella abituale. Si ha poi anche:

$$M = \frac{\sigma I^* E^*}{y E_i}$$

e solo se E_i coincide con E^*, sarà:

$$M = \frac{\sigma I^*}{y} .$$

Per calcolare I^*, si potrà, col procedimento sopra indicato, attribuire alle strisce parallele a x, delle quali può pensarsi costituita la sezione, una larghezza fittizia ottenuta dalla reale moltiplicandola per $\frac{E_i}{E^*}$.

Come abbiamo già detto, le espressioni ora scritte sono relative ad una sezione prefissata nella quale si conoscano già le tensioni interne, e la loro distribuzione, e dipendono da queste; esse possono riuscire particolarmente utili per lo studio della sezione limitatamente a quella data sollecitazione.

Passando ora a studiare il comportamento della sezione sotto varie sollecitazioni, facciamo variare il raggio di curvatura r. Teniamo fisso l'asse x: potremo ripetere, per il nuovo raggio di curvatura, quanto abbiamo più sopra detto. In corrispondenza di determinate ε_A avremo ulteriori posizioni del punto X e ulteriori valori di N.

Si possono quindi anche tracciare due diagrammi, in ognuno dei quali si porta come ascissa la curvatura $\frac{1}{r}$, mentre quali ordinate si porteranno nel primo le distanze y_x del punto X dall'asse neutro, nel secondo i valori di N. Avremo così una curva che dà la variazione di y_x ed una seconda che dà la variazione di N in corrispondenza di $\frac{1}{r}$ e di un determinato valore di ε_A ovvero della posizione dell'asse neutro. Al variare di ε_A potremo poi avere quante curve vogliamo delle due specie dette.

Lo studio della sezione così compiuto si può poi estendere a sezioni affini alla data. Basterà cambiare il valore di r lasciando immutati quelli di ε_A, ε_B: occorrerà per conseguenza alterare la sezione per affinità assumendo l'asse x come asse di affinità: le dimensioni secondo l'asse y si altereranno quindi secondo un determinato rapporto.

È facile ora controllare che si verificano le seguenti proprietà:

a) Se si chiamano con A_1 e A_2 le due aree parziali sulle quali si verificano tensioni di segno opposto, il rapporto

$$\frac{\int_{A_1} \sigma \, dA_1}{\int_{A_2} \sigma \, dA_2} = \frac{\int_{A_1} \sigma \, b dy}{\int_{A_2} \sigma \, b dy}$$

non muta, perchè le altezze dy delle strisce saranno tutte alterate secondo il rapporto di affinità, che non influisce nè su b nè su σ.

b) La quantità

$$\int_{A_1} \sigma \, dA_1 - \int_{A_2} \sigma \, dA_2 = N$$

verrà ampliata secondo il rapporto di affinità introdotto, come appare subito da un ragionamento simile al precedente.

c) La curvatura verrà ridotta nel rapporto di affinità.

Dalla proprietà *a)* si deduce che la distanza del punto X dall'asse neutro viene moltipliceta per il rapporto di affinità, dalla *b)* che la risultante delle forze interne vione anch'essa moltiplicata pel rapporto detto.

Al variare dunque del raggio di curvatura, per determinati valori di ε_A , ε_B e quindi dalle σ_{max} che si verificano nelle sezioni, si possono costruire quante si vogliano sezioni capaci di resistere a corrispondenti valori della forza N applicata nei punti X.

Se invece si vuol mantenere fisso il punto X, ed avere diversi valori di N, si può applicare un' altra trasformazione dalla sezione, cioè un'affinità rispetto all' asse y. Alterando con un determinato rapporto le dimensioni secondo x, cioè le lunghezze delle strisce nelle quali può pensarsi decomposta la sezione, si altererà nello stesso rapporto la grandezza della risultante, mentre non si altererà la posizione del centro di pressione X. Si avranno in tal modo sezioni idonee a resistere a diversi valori della forza N applicata in X.

Riassumendo, scelta una sezione, facendo variare la posizione dell'asse neutro e la curvatura, si ottiene, in base alla serie di diagrammi come quelli sopra descritti, il comportamento completo della sezione sotto l'azione di varie forze N applicate in vari punti X dell'asse y. Ciò è quanto occorre e basta per la verifica di stabilità della sezione.

Invece, le sopra descritte trasformazioni per affinità servono per adattare, in sede di progetto, una sezione resistente, affine a quella data, a determinate forze esterne.

È molto importante notare che, data la possibilità di trasformare una sezione per affinità nella direzione dei due assi, basta aver eseguito lo studio sopra esposto per una sola sezione, per una determinata forma, studio che si può quindi compiere una volta tanto, anche indipendentemente dal singolo progetto. Per conseguenza, il problema del calcolo delle sezioni nei solidi che studiamo, che sarebbe altrimenti molto complesso, diviene di attuazione tutt' altro che difficile. L'autore si ripromette di esporre, in una prossima nota, i risultati dei calcoli sopra specificati, applicati a diverse forme di sezioni.

III. — *Studio di una sezione di forma generica sollecitata a flessione semplice.* — Esaminiamo ora il caso di sezioni sollecitate a flessione semplice.

Procedendo come sopra si è specificato, la condizione da soddisfare per tentativi sarà ora che l'$\int \sigma \, dA$ esteso a tutta la sezione deve essere nullo, e che quindi X dev'essere all'infinito.

Nella precedente analisi, per ogni asse neutro x sarà facile determinare, eventualmente con una curva d'errore, il valore di $\frac{1}{r}$ che rende $N = 0$, e, in corrispondenza, il valore di M; e quindi tracciare un diagramma di M in funzione di $\frac{1}{r}$ per pura flessione.

Restano così individuate, per $N = 0$ e per un dato M, la curvatura e la posizione dell'asse neutro. Con che è perfettamente definito il comportamento della sezione alla pura flessione. In sede di progetto, si possono variare le dimensioni della sezione per affinità rispetto all'asse x; varierà la curvatura con legge di proporzionalità inversa, se si tien fisso ε_A, come si rileva dalla $\varepsilon = \frac{y}{r}$. Poichè le altezze delle strisce nelle quali si immagina divisa la sezione variano secondo il rapporto di affinità, e con la stessa legge variano le distanze y dall'asse x, il momento delle forze interne elementari varierà secondo il quadrato del rapporto di affinità. Partendo allora dalla sezione base, si può utilizzare il sopra detto diagramma, ad essa relativo, che, per flessione pura, dà i valori di M in funzione di $\frac{1}{r}$. Difatti, per una sezione le cui ordinate stiano in un determinato rapporto di affinità k con quelle della data, il momento flettente che essa potrà assorbire per ogni r sarà dato dall'ordinata corrispondente all'$\frac{1}{r}$ della curva tracciata, ampliata secondo il quadrato del rapporto k; mentre la curvatura corrispondente sarà il valore di $\frac{1}{r}$ ora detto, ridotto nel rapporto k.

Anche nel caso della flessione semplice si può poi variare la sezione per affinità rispetto all'asse y, lasciando inalterati le ε e l'r ottenendo sezioni capaci di assorbire momenti alterati secondo lo stesso rapporto di affinità.

Naturalmente così facendo non si raggiungerà, in generale, la condizione che le sollecitazioni massime dei due segni siano eguali ai relativi carichi di sicurezza. Tale condizione di equiresistenza può però ottenersi influendo opportunamente sulle dimensioni parallele all'asse x in una delle due parti in cui l'asse neutro divide la sezione.

Si fissa infatti a tale scopo una $\varepsilon_{A_{max}}$ che corrisponda ad una σ eguale al carico di sicurezza, e si trova il valore di r, per cui la sollecitazione in B sia anche eguale al relativo carico di sicurezza. Non sarà allora soddisfatta

la condizione

$$\int \sigma b \, dy = 0 ; \qquad [4]$$

ma si può ora cambiare la larghezza di una delle due parti in cui l'asse neutro divide la sezione (o soltanto quella di una striscia, p. es. la più lontana dall'asse neutro) finchè sia $\int \sigma b dy = 0$. Se il momento resistente risulta poi inadeguato si può ricorrere alla trasformazione per affinità secondo l'asse x.

In tal modo può ritenersi compiuto lo studio di una sezione di forma qualsiasi. È possibile per conseguenza procedere al calcolo di verifica o di progetto di essa senza eccessive difficoltà, quando si seguano i procedimenti sopra indicati.

IV. — *Semplificazioni per le sezioni di forma particolare.* — Per sezioni di forma particolare si va incontro a diverse semplificazioni, che è opportuno notare.

Supponiamo anzitutto che la sezione sia rettangolare: si può allora lasciarne indeterminata l'altezza. Segnata quindi la traccia di una sezione di larghezza prefissata e di altezza indefinita, cioè, in altri termini, un asse y, prendiamo su esso un punto, traccia dell'asse neutro x. Poichè le ε sono proporzionali alle distanze dall'asse x, potremo disegnare i diagrammi σ, ε di trazione e di compressione, l'uno al di sopra, l'altro al di sotto della traccia dell'asse x, prendendo l'asse y come asse delle ε Occorrerà naturalmente individuare la legge di proporzionalità tra ε ed y; a tale scopo fissiamo un raggio di curvatura r della linea elastica assunta dalle trave dopo la deformazione: si avrà

$$\varepsilon = \frac{y}{r} . \qquad [1]$$

Tale r potrà in un primo tempo esser posto eguale o poco diverso da quello che si avrebbe nel caso dei materiali elastici, per i quali esso è di immediata determinazione. In altri termini si può prima calcolare la sezione con le abituali formole, per avere il raggio di curvatura corrispondente da introdurre nella [1].

Disegnamo ora le linee integrali i e i' dei diagrammi delle σ di trazione e di compressione. A due ordinate qualsiasi dei detti diagrammi integrali, per esempio a quelle che corrispondono alla condizione che le sollecitazioni di trazione e di compressione raggiungano i rispettivi carichi di sicurezza, corrisponde un caso generico di sollecitazione di sforzo normale e flessione ed un'altezza della sezione. La risultante N degli sforzi interni sarà ap-

plicata in un punto X, e si potranno trovare, al variare delle σ ammesse, diversi di tali punti e diversi corrispondenti valori di N; cambiando poi r, si potranno ottenere ancora ulteriori punti X, in corrispondenza di varie σ, e i relativi valori di N. Dell'affinità rispetto all'asse x ci siamo intanto giovati col mantenere variabile l'altezza della sezione, ciò che ha permesso di raggiungere le sollecitazioni di sicurezza a tutti e due gli estremi della sezione.

Dato ora un punto X_1 di applicazione della forza esterna, si potrà individuare quel punto X che coincida con X_1 per il quale le σ risultino convenienti, possibilmente eguali al carico di sicurezza. Ed allora, se, come in generale avverrà, la risultante delle forze interne corrispondente a X_1 non è eguale alla forza esterna data N_1 si potrà alterare la sezione per affinità rispetto all'asse y, fino raggiungere tale eguaglianza.

Il caso ora studiato comprende quello della flessione semplice, per il quale occorre soddisfare la condizione [4] ed equilibrare un determinato momento flettente esterno. È opportuno notare, per esso, qualche proprietà particolarmente semplice.

Le ordinate dei due diagrammi i e i' dovranno risultare eguali, in modo che l'area complessiva del diagramma delle σ sia nulla. A coppie di ordinate eguali corrisponderanno determinate sezioni e particolari valori del momento flettente, in relazione ai momenti delle forze interne. Assumendo poi diversi valori di r, si avranno ancora diversi valori del momento flettente corrispondenti ad una stessa coppia di valori di σ ed alcune di tali coppie potranno anche essere eguali ai relativi carichi di sicurezza. Per equilibrare un determinato momento flettente si potrà poi anche servirsi della variazione della sezione per affinità rispetto all'asse y.

Se non si riesce per tale via ad ottenere la condizione di equiresistenza e non si vuol rinunziare ad essa, si dovrà adottare una sezione non più rettangolare, ma di larghezza diversa in zone diverse. Si raggiungano, in tal caso, nelle linee i e i', ordinate corrispondenti al caso che, per un determinato r, il materiale sia sollecitato a trazione e a compressione ai relativi carichi di sicurezza: in generale non sarà più soddisfatta la relazione [4]. Ma se supponiamo, per fissare le idee, che la sollecitazione di trazione sia nel complesso maggiore di quella di compressione, basterà ampliare opportunamente la larghezza della zona compressa (di tutta o meglio di una striscia più lontana dall'asse neutro), finchè sia di nuovo soddisfatta la [4].

Per alcune forme di sezioni diverse della rettangolare, si potranno poi volta per volta trovare opportuni accorgimenti che valgano a semplificare e ridurre il lavoro da compiere.

Se si ha p. es. una sezione a doppio T, sollecitata a flessione semplice, si dovrà realizzare la condizione [4] e possibilmente l'equiresistenza. Ammettendo di poter realizzare una sezione dissimetrica rispetto all'asse x, ciò che risulta molto opportuno, si potrà procedere nel modo seguente. Si

assegni la forma generica della sezione, a doppio T, come si è detto. Fissata poi una sezione provvisoria ed una ε_{max} per esempio di trazione, si costruisca il diagramma delle σ per tutta la sezione; non sarà in generale soddisfatta la [4] nè la condizione di equiresistenza. Si può facilmente, sopprimendo o aggiungendo un tratto dell'anima, pervenire al risultato di raggiugere le sollecitazioni di sicurezza ai due estremi della sezione. Stabilita così l'altezza di essa, si può costruire la sezione virtuale, come detto in principio; ed allora, essendo per essa l'asse neutro baricentrico, si varierà poi la larghezza di una parte, la tesa o la compressa, come si è detto per la sezione rettangolare, finchè le due parti di sezione, al di sopra e al di sotto dell'asse neutro, abbiano lo stesso momento statico rispetto a tale asse: sarà così soddisfatta la [4].

Se non si vuol ammettere la variazione di larghezza, si rinunzierà alla condizione di equiresistenza, e si potrà cambiare l'altezza della trave con qualche semplicissimo tentativo per fissare la posizione della piattabanda lavorante a compressione, con la condizione [4]; od anche cambiare la ε_{max} di partenza.

La sezione così progettata costituirà poi sempre un tipo idoneo ad assorbire momenti flettenti maggiori o minori, in quanto che alterando per affinità le dimensioni secondo l'asse x, si potrà variare a piacere, nei limiti di un conveniente rapporto tra altezza e larghezza, il momento resistente della sezione.

Un altro avvertimento di natura pratica è che converrà spesso, nello eseguire i calcoli di primo proporzionamento di sezioni qualsiansi, adottare, come già si è accennato, i risultati derivanti dal calcolo eseguito supponendo il materiale elastico, con un opportuno valore di E.

Senza che del resto insistiamo su soluzioni od accorgimenti particolari, è ovvio che, caso per caso, potrà il progettista, in base ai criteri ed ai risultati generali da noi conseguiti e riportati più su, trovare le opportune semplificazioni che valgano ad inquadrare razionalmente il lavoro da compiere, e a fargli risparmiare tempo.

V. — *Studio delle deformazioni e della determinazione delle incognite iperstatiche.* — Le deformazioni dovute allo sforzo normale si possono calcolare con l'abituale espressione

$$\Delta l = \frac{N l}{E A} \qquad [5]$$

nella quale però bisogna porre per E il valore E_s corrispondente a N, cioè a

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

In quelle dovute alla flessione, analogamente a quanto ora si è detto, bisognerà che I abbia il significato e l'espressione sopra specificata, corrispondente alle tensioni interne che nelle singole sezioni si verificano, che sia pertanto variabile da sezione a sezione, in relazione alla variazione di E, e indipendentemente quindi dal fatto che esso varia poi ovviamente al variare delle dimensioni della sezione. L'espressione della rotazione può del resto opportunamente scriversi:

$$d\varphi = \frac{dx}{r} \qquad [6]$$

nella quale $1/r$ avrà il valore corrispondente al momento flettente agente nella singola sezione, che si può leggere quale ascissa della curva $1/r$, M sopra specificata.

Fin quando si tratta di determinare deformazioni in costruzioni nelle quali si sia già proceduto ai calcoli statici, p. es. in costruzioni isostatiche, il problema si presenta ancora semplice.

Ma se l'individuazione delle deformazioni ha per scopo di determinare incognite iperstatiche, il problema si complica: esponiamo qui di seguito in qual modo riteniamo esso possa essere affrontato.

Potremo sempre applicare il teorema dei lavori virtuali, essendo il sistema in equilibrio. Supponiamo ora, per fissare le idee, di avere un sistema reticolare con una sola incognita iperstatica: potremo sempre combinare la sollecitazione $X = 1$ con gli spostamenti effettivi, cioè, per vincoli rigidi, scrivere la

$$\Sigma N' \Delta l = 0 \qquad [7]$$

avendo indicato, come al solito, con N' lo sforzo prodotto in un'asta generica da $X = 1$, e con Δl la variazione di lunghezza dell'asta.

Il principio di sovrapposizione degli effetti, per quanto riguarda le sollecitazioni esterne, è tuttora applicabile, onde è, con gli abituali simboli:

$$N = N_0 + N' X$$

mentre

$$\Delta l = \frac{N l}{E A}$$

Ma, come or ora abbiamo detto, E deve ritenersi funzione di N attra-

verso σ. Lo sviluppo del calcolo può rimanere quindi immutato, salvo lo avvertimento relativo ad E; onde si potrà ancora scrivere:

$$\Sigma N_0 N' \frac{l}{E A} + X \Sigma N'^2 \frac{l}{E A} = 0 \qquad [8]$$

L'equazione sopra scritta non è però lineare in X e l'espressione del $\Delta 1$ è calcolata in corrispondenza di un determinato valore di X, che potrà essere diverso da quello risultante dalla risoluzione dell' equazione. In altri termini, si tratta di applicare un metodo di iterazione, partendo da un determinato valore di X ed eseguendo diverse iterazioni, finchè due successive diano valori di X poco diversi tra loro.

Per i solidi non reticolari, bisognerà fare analoghe osservazioni, tenendo presente che deve assumersi variabile non solo E, ma anche I. Procedendo come prima, si avrà, tenendo conto della sola flessione e per un sistema con una sola incognita iperstatica:

$$\int M_0 M' \frac{d x}{E I^*} + X \int M'^2 \frac{d x}{E I^*} = 0 \qquad [9]$$

dove, ripetiamo I^* é variabile da sezione a sezione. La [9], come la precedente, non è effettivamente lineare in X, in quanto che I^* è funzione di X attraverso M: dovrà, quindi sempre applicarsi un metodo di iterazione. Sembra tuttavia opportuno conservare la forma abituale dell'equazione [9], anche per le considerazioni seguenti.

Nei sistemi iperstatici, occorre sempre prefissare i valori delle aree e dei momenti d'inerzia, i quali dipendono effettivamente dai valori delle incognite iperstatiche; nel caso in esame i momenti d'inerzia ed i moduli E sono funzioni delle incognite iperstatiche nel modo più generale, ma, se non concettualmente, praticamente il procedimento può riguardarsi e condursi in modo analogo all' abituale. Intendiamo cioè dire che, poichè occorre sempre prefissare l'incognita iperstatica, tale valore iniziale di essa determina i valori iniziali di E e di I; anzi in pratica si potrà anche incominciare col supporre E costante ed I variabile con X nel modo abituale. Con successive iterazioni si potrà poi pervenire alla soluzione esatta o sufficientemente approssimata.

Vi è dunque una maggior complessità di calcolo rispetto al metodo abituale, ma non eccessiva, nè, ciò che più importa, comportante un notevole cambiamento nel modo di sviluppo del calcolo stesso.

Ma possiamo procedere anche un pò diversamente. Come abbiamo detto, è possibile prevedere con una certa approssimazione, che poi verrà verificata dal prosieguo del procedimento, il valore dell' incognita iperstatica: chiamiamo X' tale valore. In relazione ad esso, si potrà calcolare la de-

formazione corrispondente; p. es. se si tratta di una travatura reticolare, si calcolerà il $(\Delta\ 1)'$ corrispondente: secondo le notazioni precedenti esso è dato da $\frac{N\,l}{E\,A}$ dove per E comparirà il valore del modulo di elasticità relativo a $\sigma = \frac{N}{A}$, essendo N il valore, corrispondente a X' dello sforzo in un'asta. Il valore effettivo di X sarà

$$X = X' + \Delta\ X'$$

chiamando $\Delta\ X'$ l'incremento positivo e negativo di X', che supponiamo contenuto in limiti ristretti. In tali limiti varierà anche la sollecitazione $N'\ X'$ nelle singole aste, e potremo ritenere che il materiale si comporti come nel campo elastico, con la sola differenza che il relativo modulo di elasticità sarà quello istantaneo corrispondente al valore X' o quello medio corrispondente alla variazione $\Delta\ X'$. La deformazione totale sarà:

$$\Delta\ l = (\Delta\ l)' + \Delta\ X' \frac{N'\,l}{E_{ist}\,A}$$

Per il teorema dei lavori virtuali sarà:

$$\Sigma\ N'\ \Delta\ 1 = 0$$

se i vincoli sono rigidi. Sviluppando si ha:

$$\Sigma\ N'\ (\Delta\ l)' + \Delta\ X' \Sigma\ \frac{N'^2\,l}{E_{ist}\,A} = 0$$

da cui

$$\Delta\ X' = -\ \frac{\Sigma\ N'\ (\Delta\ l)'}{\Sigma\ \frac{N'^2\,l}{E_{ist}\,A}}$$

Se il valore di $\Delta\ X'$ così calcolato è piccolo, in modo che possa ritenersi che vi corrisponde effettivamente il valore supposto di E, il problema è risolto; altrimenti si eseguirà un nuovo tentativo, partendo dal valore già trovato. Ma i tentativi saranno in numero minore che non col metodo precedente.

Se il solido è sollecitato a flessione, si avrà analogamente:

$$d\,\varphi = (d\,\varphi)' + \Delta\ X' \frac{M'\,dx}{E_{ist}\,I}$$

dove $(d\varphi)'$ ha il valore corrispondente all'X di primo tentativo, da calcolarsi nel modo specificato più su, come nella [6], e l'I del 2° termine ha il valore abituale, dato che nel tratto che consideriamo riteniamo che il materiale si comporti elasticamente, però con un corrispondente modulo di elasticità, medio nell'intervallo di variazione relativo a $\Delta X'$.

E quindi, di seguito:

$$0 = \int M' \, d\varphi = \int M' \, (d\varphi)' + \Delta X' \int \frac{M'^2 \, dx}{E_{ist} \, I}$$

$$\Delta X' = - \frac{\int M' \, (d\varphi)'}{\int \frac{M'^2 \, dx}{E_{ist} \, I}}$$

E tale valore $\Delta X'$ dev'essere, come sopra detto, sufficientemente piccolo.

Considerazioni perfettamente analoghe valgono se le incognite iperstatiche sono più d'una.

Sarebbe soddisfacente esprimere esplicitamente la dipendenza di E e di I da M, precisare cioè le funzioni E_M e I_M e far risultare la non linearità dell'equazione (9). Ma nel caso generale ciò darebbe luogo ad espressioni troppo complicate, specie se, come spesso accade, il diagramma σ , ε non ha una forma traducibile in una relazione analitica.

Può essere interessante vedere invece come, in qualche caso particolare, quando, p. es., l'incognita iperstatica è una sola, lo sviluppo del procedimento si presenta particolarmente semplice.

Si abbia una trave incastrata ad un estremo ed appoggiata nell'altro. L'iperstatica è notoriamente una sola, p. es. la reazione X dell'appoggio.

In tal caso, il diagramma dei momenti sarà costituito dalla superficie semplice dei momenti, di immediata determinazione, riferita ad una retta di chiusa che dipende dalla grandezza dell'incognita iperstatica X. Diamo un valore di tentativo ad X, assegnamo cioè una posizione della retta di chiusa. Servendoci del diagramma $\frac{1}{\rho}$, M per pura flessione, descritto più sopra, potremo determinare le curvature in corrispondenza delle diverse sezioni, ed ottenere il relativo diagramma. Integrando due volte tale diagramma si determinerà la freccia di estremità, che, se il valore di X fosse esatto, dovrebbe risultare nulla. Se ciò, come in generale accade, non si verifica, si varierà il valore di X e, mediante una curva d'errore, con pochi tentativi si troverà il vero valore di tale incognita.

Se invece si ha una trave incastrata rigidamente ai due estremi e con un carico simmetrico rispetto alla mezzeria, essendo ancora una sola l'incognita iperstatica, cioè il momento di incastro, si potrà procedere nel seguente modo. Trovata la superficie semplice dei momenti, si segni una

retta di chiusa di tentativo che determini momenti eguali ai due estremi della trave. Individuato il diagramma delle curvature, come sopra detto, si proceda alla doppia integrazione di esso, ottenendo la linea elastica: la tangente di estremità e quella nella sezione di mezzeria devono risultare parallele. Ove ciò non si verifichi, si eseguirà qualche ulteriore tentativo servendosi sempre di una curva d'errore. Per la simmetria, le operazioni possono poi evidentemente limitarsi a metà trave.

Sempre in modo simile possono risolversi il caso della trave continua su tre appoggi, ed altri analoghi, onde non vi insistiamo ulteriormente.

VI. *Conclusioni.* — Con quanto precede, crediamo di aver impostati e risolti, con la dovuta generalità e nello stesso tempo con spirito di praticità, i principali problemi relativi alla statica dei solidi prismatici non seguenti la legge di Hooke. Abbiamo anche mostrato che i calcoli necessari, se pure inevitabilmente più complessi di quelli che si svolgono nei casi ordinari, sono ancora effettuabili senza grandi difficoltà, anzi possono eseguirsi rapidamente quando si sia in possesso dei risultati dello studio sopra specificato, relativo a possibili forme di sezione. E poichè tale studio, come già abbiamo detto, può compiersi una volta tanto, il vantaggio dell'applicazione dei metodi sopra esposti risulta in pratica particolarmente notevole.

Instabilità nell'arco con spinta eliminata

Nota del prof. **Adriano Galli,** *presentata dal socio ord.* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 7 giugno 1941 - XIX)

Sunto. — Si determina il valor critico della spinta orizzontale dell'arco ribassato con spinta eliminata tenendo conto della deformazione elastica del tirante e, con approssimazione, di quella dei montanti. Su di un esempio numerico si constata l'ottimo comportamento dell'arco nei riguardi della stabilità longitudinale.

La presente nota tratta del problema dell'instabilità dell'arco con tirante, per inflessione nel piano stesso dell'arco.

L'interesse pratico di questa determinazione appare giustificato specialmente in vista delle sempre più importanti applicazioni di questo tipo di struttura e del contemporaneo incremento della massima sollecitazione consentita per il calcestruzzo (sia pure con opportune limitazioni), dal più recente R. D. contenente le norme per la esecuzione delle opere in conglomerato cementizio semplice ed armato.

Come è noto [1]) una deformazione dell'arco che porti l'asse tutto al di sopra o tutto al di sotto della primitiva posizione non è pensabile perchè in contrasto con le forze normali che si destano con l'inflessione. La deformata dell'asse dell'arco assume quindi la configurazione indicata nella fig. 1, con un punto di passaggio in chiave.

Il momento nella sezione x, preso rispetto all'asse deformato, è, con le posizioni della fig. 1,

$$M = M_0 - H(y - \lambda).$$

L'arco prescelto sia funicolare del carico, quindi:

$$M_0 - Hy = 0$$

dove H rappresenta la spinta orizzontale prima dell'inflessione. Per la natura stessa del problema in esame, H non aumenta durante l'inflessione, e quindi conserva inalterato il suo valore in seguito alla piccola deformazione λ. Otteniamo così:

$$M = H\lambda$$

[1]) M. Ritter, *Analytisch Berechnung gelenkloser Brückengewölbe*. Sonderdruck aus der Deutschrift der E. T. H., 1937.

e quindi:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = H\frac{d^2\lambda}{dx^2}. \qquad (1)$$

D'altra parte è noto che l'equazione della linea elastica per aste curve è:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI\cos\varphi},$$

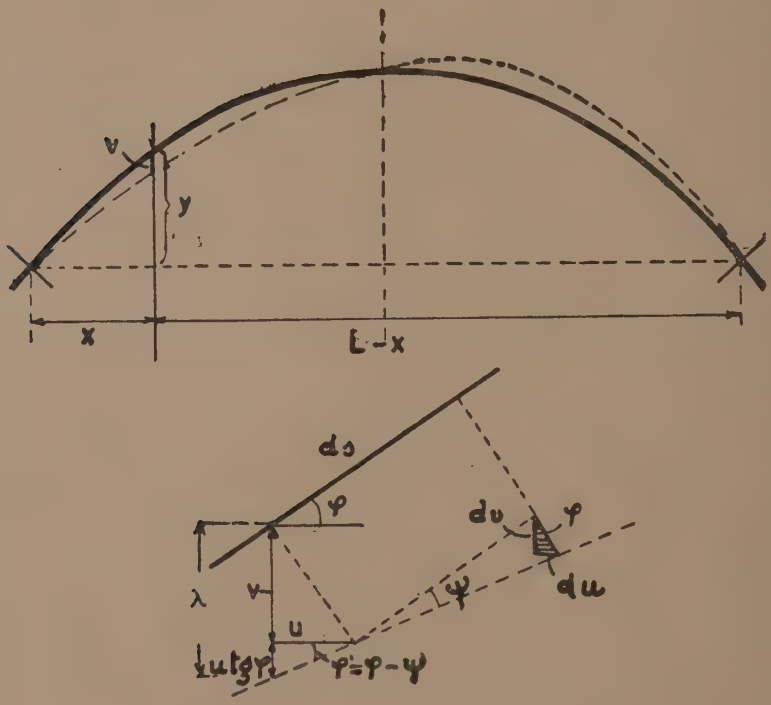


FIGURA 1

dalla quale si rileva che:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -\frac{d^2}{dx^2}\left[EI\cos\varphi\frac{d^2v}{dx^2}\right]. \qquad (2)$$

Come mostra la fig. 1, v non si identifica con λ, epperò:

$$\varphi' = \varphi - \psi = \varphi - \frac{dv}{ds\cos\varphi} = \varphi - \frac{dv}{dx}$$

cioè, per piccole inflessioni, può assumersi $\varphi' = \varphi$; inoltre:

$$\lambda = v + u\, tg\, \varphi' = v + u\, tg\, \varphi = v + u \frac{dy}{dx} \qquad (3)$$

in cui (come si rileva dal triangolino della fig. 1) può assumersi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dv}$$

e quindi

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2v}{dx^2}\,\frac{dy}{dx} + \frac{dv}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (4)$$

dalla (3), mediante la (4), si ricava:

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} = \frac{d^2v}{dx^2}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)^2 + 3\,\frac{dv}{dx}\,\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2} + u\,\frac{d^3y}{dx^3}\,.$$

Sostituendo nella (2) ed ordinando si ricava l'equazione della inflessione:

$$H\left\{\frac{d^2v}{dx^2}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] + 3\,\frac{dv}{dx}\,\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2} + u\,\frac{d^3y}{dx^3}\right\} + \frac{d^2}{dx^2}\left(EI\cos\varphi\,\frac{d^2v}{dx^2}\right) = 0. \qquad (5)$$

La integrazione di questa equazione, anche per semplici espressioni della y e di I, in funzione di x, presenta difficoltà pressochè insormontabili, così da costringere a soluzioni approssimate. Per archi ribassati, quando si possa porre $I\cos\varphi = I_\alpha$ dove I_α è il momento d'inerzia in chiave, potendonsi trascurare $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ la (5) si riduce all'espressione semplice:

$$\frac{d^4v}{dx^4} + \frac{H}{EI_\alpha}\,\frac{d^2v}{dx^2} = 0. \qquad (6)$$

Ritorniamo ora, in particolare, al problema propostoci: con le posizioni indicate nella fig. 2, ed indicando con Ω la sezione di un montante, con passaggio dal discreto al continuo porremo

$$\omega(x) = \frac{\Omega}{\Delta}$$

in cui Δ è la distanza fra i due montanti.

Indichiamo ancora con E_c il modulo di elasticità relativo ai montanti con il significato di v e z evidenti dalla fig. 2, sarà:

$$p(x) = \frac{E_c \omega(x)}{h(x)}(z - v)$$

in cui h è l'altezza (variabile con x) dei montanti.

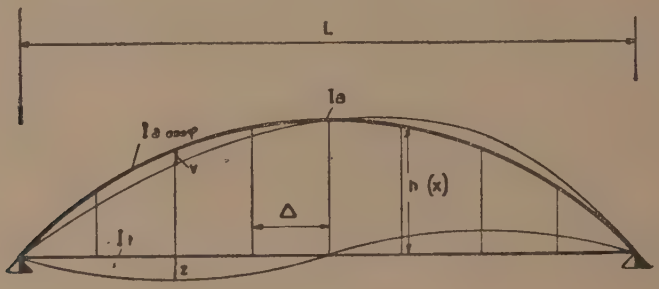


FIG. 2

La (6), quando si tenga conto di $p(x)$, e l'equazione della trave-tirante si scriveranno rispettivamente:

$$\begin{aligned} E_a I_a \frac{d^4 v}{dx^4} + H \frac{d^2 v}{dx^2} &= p(x) = \frac{E_c \omega(x)}{h(x)}(z - v) \\ E_t I_t \frac{d^4 z}{dx^4} - H \frac{d^2 z}{dx^2} &= -p(x) = \frac{E_c \omega(x)}{h(x)}(v - z). \end{aligned} \qquad (7)$$

Supponiamo ora che sia $\frac{\omega}{h} = \text{cost.}$ o, quanto meno, accontentiamoci di porre per $\frac{\omega}{h}$ il valore minimo e, poniamo, con il rispetto dei vincoli:

$$v = A \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L}$$

$$z = B \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L}.$$

Sostituendo nelle (7), otteniamo:

$$\begin{aligned} E_a I_a A \left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 - HA \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 &= E_c \frac{\omega}{h}(B - A) \\ E_t I_t B \left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 + HB \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 &= E_c \frac{\omega}{h}(A - B) \end{aligned}$$

e cioè un sistema omogeneo in A e B. Il discriminante, eguagliato a 0, fornisce la seguente equazione determinatrice di H;

$$\begin{vmatrix} E_a I_a \left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 - H\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 + E_c \frac{\omega}{h} & -E_c \frac{\omega}{h} \\ -E_c \frac{\omega}{h} & E_t I_t \left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 + H\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 + E_c \frac{\omega}{h} \end{vmatrix} = 0.$$

Questo procedimento si presta anche all'analogo calcolo per il ponte con strada superiore (fig. 3), con l'unica variante che nell'equazione della trave, e cioè nella 2.ª delle (7) scompare il termine contenente H.

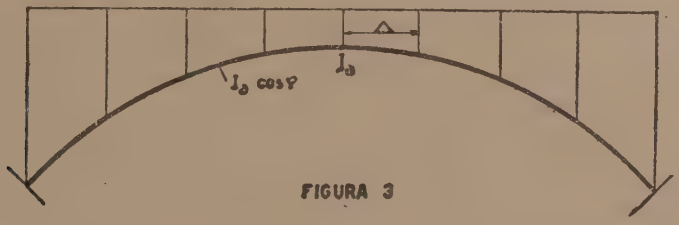


FIGURA 3

Con riferimento ad un esempio concreto, sia $L = 100\ m$ la luce di un arco con spinta eliminata e siano:

$$E_a I_a = 10^{12}\ \text{kg cm}^2$$
$$E_t I_t = 3^{12}\ \text{kh cm}^4$$
$$E_c \frac{\omega}{h} = 40 \quad \text{kg cm}^{-2}.$$

La (8) diventa

$$(0{,}155 - 0{,}394 \times 10^{-7} = H + 40)\,(0{,}046 + 0{,}394 \times 10^{-7} = H + 40) - 1600 = 0$$

che, con la sua radice positiva, fornisce $H = 6980^t$.

In un analogo arco a due cerniere, la formula approssimata $H = \frac{4\pi^2 E_a I_a}{L^2}$ avrebbe dato $H = 400^t$: ne consegue l'ottimo comportamento dell'arco a spinta eliminata nei riguardi della stabilità longitudinale.

Decomposizione al modo di Poincaré delle funzioni bi-iperarmoniche in due variabili. [1])

Nota di **Gaetano Fichera**, *presentata dal socio ordinario* **M. Picone**

(Adunanza del dì 7 giugno 1941-XIX)

Sunto. — Si ottiene per le funzioni bi-iperarmoniche in due variabili una formola di decomposizione, che è l'estensione di quella di Poincaré per le funzioni armoniche. Mediante l'introduzione di certi operatori Φ si riconosce il carattere invariantivo di alcune funzioni, che intervengono in tale decomposizione, rispetto alla scelta di certi poli.

Introduzione. — Se B_0 è un insieme semplicemente connesso del piano (x, y), limitato o no, e $B_1, B_2, \ldots, B_p$ continui limitati a due a due privi di punti in comune, contenuti in B_0, detta u una funzione armonica nell'insieme aperto

$$A = B_0 - B_1 - B_2 - \ldots - B_p,$$

sussiste, com'è noto, la decomposizione in somma, che va col nome di Poincaré:

$$u(P) = u_0(P) + u_1(P) + \ldots + u_p(P) + \sum_{k=1}^{p} \delta_k \log \overline{O_k P},$$

dove u_0 è funzione armonica in B_0, u_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ in $C B_k$ [2]) e convergente all'infinito, O_k un punto arbitrariamente fissato in B_k e la costante δ_k (detta C_k una qualsiasi curva regolare, semplice e chiusa che racchiuda B_k ed escluda i continui B_h, con $h \neq k$) il valore dell'integrale

$$\int_{C_k} \frac{du}{dn}\, ds,$$

---

[1]) Lavoro del Laboratorio d'Analisi Superiore della R. Università di Roma, eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

[2]) Se con la lettera I si indica un insieme in uno spazio, con la notazione $C I$ si suole indicare, com'è noto, l'insieme complementare.

che non dipende dalla particolare curva C_k considerata e che il Prof. Picone ha chiamato *flusso* della u relativo a FB_k [3]).

In questo lavoro, pervenendo ad una formola già prevista dal Prof. Picone [4]), estendo questo tipo di decomposizione alle funzioni bi-iperarmoniche in due variabili, ma il procedimento seguito è estendibile alle funzioni di qualsiasi ordine di iperarmonicità e in qualsivoglia numero di variabili. In tali ipotesi generali la via da seguire è concettualmente identica a quella qui percorsa nel considerato caso particolare e solo il lato formale delle dimostrazioni si complica notevolmente. Tale procedimento inoltre, quando si applichi, in particolare, ad una funzione iperarmonica in un iperstrato sferico, permette di pervenire al teorema di sviluppo in serie di Laurent e quindi alle decomposizioni d'Almansi e di Picone, risultati, questi, già stabiliti per altra via, facendo uso delle proprietà integrali delle funzioni iperarmoniche in un iperstrato e di un teorema sulla convergenza di certe serie, che generalizza il teorema di Abel sulle serie di potenze [5]). Si vede allora che in tal caso la formola di Stokes per le funzioni armoniche e quelle di Boggio per le iperarmoniche hanno lo stesso ufficio che la formola di Cauchy per le funzioni olomorfe nella teoria delle funzioni analitiche. Tutto questo sarà argomento di un prossimo lavoro.

1. Sia A un insieme aperto del piano (x, y) e le funzioni $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ siano in esso finite e continue assieme a tutte quelle derivate parziali di cui faremo uso nelle formole che considereremo. Se D è un arbitrario dominio regolare contenuto in A, sussiste, com'è noto, la formola di Green:

$$\int_D (\psi \Delta_2 \varphi - \varphi \Delta_2 \psi)\, d\tau + \int_{FD} \left(\psi \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d\psi}{dn} \right) ds = 0 ,$$

dove con n s'è indicata la normale interna a D.

---

[3]) Cfr. M. Picone, *Appunti d'Analisi Superiore* [Rondinella, Napoli (1940)] pp. 280-282.

[4]) Cfr. M. Picone, *Nuovi indirizzi di ricerca nella teoria e nel calcolo delle soluzioni di talune equazioni lineari alle derivate parziali della Fisica-matematica* [Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. V, serie II (1936-XVI)].

[5]) Cfr. M. Picone, loc. cit. (4). — G. Fichera, *Generalizzazione del teorema d'Abel sulle serie di potenze* [Rend. della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia d'Italia, vol. II, serie VII (1941)] e *Sviluppi in serie e teoremi di decomposizione in somma per le funzioni iperarmoniche* [Rend. del Circolo Matematico di Palermo, tomo LXIII (1941-XIX)]. A questi studi è pure dedicata la recente memoria di M. Nicolesco, *Nouvelles recherches sur les fonctions polyharmoniques* [Disquisitiones Mathematicae et Physicae, t. I (1940)].

Sommando membro a membro nelle due formole che da questa si ottengono sostituendo prima ψ con $\Delta_2\psi$ e poi φ con $\Delta_2\varphi$, si ha la seguente dovuta a MATHIEU:

$$\int_D (\psi\,\Delta_4\varphi - \varphi\,\Delta_4\psi)\,dT + \int_{FD}\left(\psi\frac{d\,\Delta_2\varphi}{dn} - \varphi\frac{d\,\Delta_2\psi}{dn}\right)ds +$$

$$+\int_{FD}\left(\Delta_2\psi\frac{d\varphi}{dn} - \Delta_2\varphi\frac{d\psi}{dn}\right)ds = 0.$$

Conseguenza immediata di tale formola è il teorema:

I) *Se* u *e* v *sono funzioni bi-iperarmoniche regolari in* A, *si ha:*

$$(1)\qquad \int_{FD}\left(v\frac{d\,\Delta_2 u}{dn} - u\frac{d\,\Delta_2 v}{dn}\right)ds + \int_{FD}\left(\Delta_2 v\frac{du}{dn} - \Delta_2 u\frac{dv}{dn}\right)ds = 0.$$

Se ora P è un punto di A che sia inoltre interno a D, con procedimento classico, introducendo la funzione

$$\overline{PQ}^2\log\overline{PQ},$$

si deduce per la funzione u bi-iperarmonica in A la seguente formola dovuta a BOGGIO: [6])

$$u(P) = \frac{1}{8\pi}\int_{FD}\left[\overline{PQ}^2\log\overline{PQ}\,\frac{d\,\Delta_2 u}{dn} - u\,\frac{d\,\Delta_2(\overline{PQ}^2\log\overline{PQ})}{dn}\right]ds(Q) +$$

$$(2)\qquad +\frac{1}{8\pi}\int_{FD}\left[\Delta_2(\overline{PQ}^2\log\overline{PQ})\frac{du}{dn} - \Delta_2 u\,\frac{d(\overline{PQ}^2\log\overline{PQ})}{dn}\right]ds(Q)\ .$$

Possiamo quindi dire:

II) *Se la funzione* u *è bi-iperarmonica regolare nell' insieme aperto* A, *detto* D *un arbitrario dominio regolare in esso contenuto, per ogni punto* P *interno a* D *sussiste la* (2).

[6]) Cfr. T. BOGGIO, *Sulle funzioni di Green d'ordine m* [Rend. del Circolo Mat. di Palermo, t. XX (1905)].

Data una curva C regolare, [7]) continua, semplice e chiusa, poniamo:

$$\Phi[u, v; C] = \frac{1}{8\pi}\int_C \left(v \frac{d\Delta_2 u}{dn_e} - u \frac{d\Delta_2 v}{dn_e}\right) ds + \frac{1}{8\pi}\int_C \left(\Delta_2 v \frac{du}{dn_e} - \Delta_2 u \frac{dv}{dn_e}\right) ds$$

avendo indicato con n_e la normale esterna a C.

Indichiamo inoltre con DC il dominio limitato dalla curva C. Sussiste il teorema:

III) *Dette* u *e* v *due funzioni bi-iperarmoniche regolari nell'insieme aperto* A, *e* C *una curva regolare, continua, semplice e chiusa in esso contenuta, il valore di* Φ [u, v; C] *rimane costante al variare di* C, *se rimane invariato l'insieme*

$$DC \,.\, FA \quad .$$

Siano infatti C e C' due curve soddisfacenti alle condizioni dell'enunciato e tali che:

$$DC \,.\, FA = DC' \,.\, FA \quad .$$

Indicata con Γ una curva pur'essa regolare, continua, semplice e chiusa, contenuta in A e non avente alcun punto in comune nè con C, nè con C', per la quale risulti:

$$D\Gamma \,.\, FA = DC \,.\, FA = DC' \,.\, FA \quad ,$$

per il teor. I si ha:

$$\Phi[u, v; C] = \Phi[u, v; \Gamma] \qquad ; \qquad \Phi[u, v; C'] = \Phi[u, v; \Gamma] \,.$$

Segue, quindi, la dimostrazione del teorema. In base ad esso, se B è un insieme chiuso, limitato, tale che FB sia parte della frontiera di A e che esistano curve regolari C, semplici e chiuse, contenute in A e che racchiudenti B, possiamo dare significato all'operatore $\Phi[u, v; FB]$ nel seguente modo:

$$\Phi[u, v; FB] = \Phi[u, v; C]$$

essendo C una qualunque curva regolare, semplice e chiusa per cui si ha:

$$DC \,.\, FA = FB.$$

---

[7]) Per curva regolare intendiamo una curva che si compone di un numero finito di archi regolari. Ciascuno dei quali, cioè, ha tangente in ogni punto, la quale varia con continuità al variare del punto.

2. Per pervenire alla decomposizione di POINCARÉ delle funzioni bi-iperarmoniche in due variabili, è opportuno premettere alcune osservazioni su taluni potenziali armonici e bi-iperarmonici.

Consideriamo la funzione:

$$\log \overline{PQ} = \log r.$$

Assunto un sistema di coordinate polari con polo nel punto O e dette ρ e θ le coordinate polari di P e ρ_0 e θ_0 quelle di Q, si ha:

$$\log r = \log \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} e^{i(\theta - \theta_0)}\right) + \\ + \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} e^{-i(\theta - \theta_0)}\right) + \log \rho$$

Si ottiene allora, per $\rho_0 < \rho$, il seguente sviluppo, che, fissato Q, riesce uniformemente convergente al variare di P all'esterno del cerchio di centro O e raggio ρ_0, e viceversa, fissato P, riesce uniformemente convergente al variare di Q all'interno del cerchio di centro O e raggio ρ:

$$\log r = \log \rho - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m} \frac{\rho_0^m}{\rho^m} \left(e^{im(\theta - \theta_0)} + e^{-im(\theta - \theta_0)}\right) = \\ = \log \rho - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\rho_0^m}{\rho^m} \cos m(\theta - \theta_0). \tag{3}$$

Se C è una curva regolare sulla quale è definita la funzione $\mu(Q)$ consideriamo il potenziale logaritmico:

$$V(P) = \int_C \mu(Q) \log r \, ds(Q) \quad ,$$

nell'ipotesi che la $\mu(Q)$ riesca su C funzione sommabile dell'arco s.

Detto Γ un cerchio con centro in O, a cui C sia interna, è subito visto, moltiplicando i due membri della (3) per $\mu(Q)$ e integrando poscia su C, che all'esterno di Γ vale lo sviluppo, uniformemente convergente al variare di P:

$$V(P) = \alpha_0 \log \rho - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha'_m \cos m\theta + \alpha''_m \operatorname{sen} m\theta}{\rho^m}$$

con

$$\alpha_o = \int_C \mu(Q)\, ds \; ; \; \alpha'_m = \frac{1}{m}\int_C \mu(Q)\, \rho_o^m \cos m\,\theta_o\, ds \; ; \; \alpha''_m = \frac{1}{m}\int_C \mu(Q)\, \rho_o^m \operatorname{sen} m\,\theta_o\, ds .$$

Osserviamo che la funzione:

$$V(P) - \alpha_o \log \rho$$

è infinitesima all'infinito.

Se, n designando un fissato asse normale alla C, consideriamo il potenziale

$$V_1(P) = \int_C \mu(Q) \frac{d \log r}{dn}\, ds \quad ,$$

si vede, con considerazioni analoghe, che all'esterno di Γ vale lo sviluppo, uniformemente convergente al variare di P:

$$V_1(P) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{\alpha'}_m \cos m\,\theta + \overline{\alpha''}_m \operatorname{sen} m\,\theta}{\rho^m}$$

con

$$\overline{\alpha'}_m = \frac{1}{m}\int_C \mu(Q) \frac{d}{dn}\,(\rho_o^m \cos m\,\theta_o)\, ds \; ; \; \overline{\alpha''}_m = \frac{1}{m}\int_C \mu(Q) \frac{d}{dn}\left(\rho_o^m \operatorname{sen} m\,\theta_o\right) ds .$$

Com'è ovvio, $V_1(P)$ riesce infinitesima all'infinito.

Dallo sviluppo (3) di $\log r$, tenendo presente che

$$r^2 = \rho^2 + \rho_o^2 - 2\rho\rho_o \cos(\theta - \theta_o) = \rho^2 + \rho_o^2 - \rho\rho_o\, e^{i(\theta-\theta_o)} - \rho\rho_o\, e^{-i(\theta-\theta_o)}$$

se ne deduce il seguente di $r^2 \log r$, valevole per $\rho_o < \rho$:

$$r^2 \log r = \rho^2 \log \rho + \rho_o^2 \log \rho - 2\rho\rho_o \log \rho \cos(\theta - \theta_o) +$$
$$\rho_o^2 - \rho\rho_o \cos(\theta - \theta_o) + \frac{1}{2}\rho_o^2 \cos 2(\theta - \theta_o) -$$
$$- \rho_o^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)} \frac{\rho_o^m}{\rho^m} \cos m(\theta - \theta_o) + \rho^2 \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} \frac{\rho_o^m}{\rho^m} \cos m\,(\theta - \theta_o).$$

Ragionando come per i potenziali armonici precedentemente considerati, vediamo che il potenziale bi-iperarmonico

$$W(P) = \int_C \mu(Q)\, r^2 \log r\, ds$$

ha all'esterno di Γ il seguente sviluppo in serie, uniformemente convergente al variare di P:

$$W(P) = \gamma_0 + \gamma_1 \log \rho + \gamma_2 \rho^2 \log \rho + \rho \log \rho \,(\lambda' \cos\theta + \lambda'' \operatorname{sen}\theta) +$$
$$+ \rho\,(\mu' \cos\theta + \mu'' \operatorname{sen}\theta) + b'_2 \cos 2\theta + b''_2 \operatorname{sen} 2\theta -$$
$$- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a'_m \cos m\theta + a''_m \operatorname{sen} m\theta}{\rho^m} + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{b'_m \cos m\theta + b''_m \operatorname{sen} m\theta}{\rho^{m-2}}$$

con

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \int_C \mu(Q)\, \rho_0^2\, ds \;;\; \gamma_2 = \int_C \mu(Q)\, ds$$

$$\lambda' = 2\mu' = -2\int_C \mu(Q)\, \rho_0 \cos\theta_0\, ds \;;\; \lambda'' = 2\mu'' = -2\int_C \mu(Q)\, \rho_0 \operatorname{sen}\theta_0\, ds$$

$$b'_2 = \frac{1}{2}\int_C \mu(Q)\, \rho_0^2 \cos 2\theta_0\, ds \;;\; b''_2 = \int_C \mu(Q)\, \rho_0^2 \operatorname{sen} 2\theta_0\, ds\,,$$

ed espressioni analoghe, facilmente ottenibili; hanno le altre costanti a'_m, a''_m, b'_m, b''_m che compaiono al secondo membro.

Il potenziale:

$$W_1(P) = \int_C \mu(Q)\, \frac{d}{dn}(r^2 \log r)\, ds(Q)$$

ha, invece, all'esterno di Γ il seguente sviluppo:

$$W_1(P) = \overline{\gamma_0} + \overline{\gamma_1} \log \rho + \rho \log \rho\,(\overline{\lambda'} \cos\theta + \overline{\lambda''} \operatorname{sen}\theta) +$$
$$+ \rho\,(\overline{\mu'} \cos\theta + \overline{\mu''} \operatorname{sen}\theta) + \overline{b'_2} \cos 2\theta + \overline{b''} \operatorname{sen} 2\theta -$$
$$- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{a'_m} \cos m\theta + \overline{a''_m} \operatorname{sen} m\theta}{\rho^m} + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{\overline{b'_m} \cos m\theta + \overline{b''_m} \operatorname{sen} m\theta}{\rho^{m-2}}$$

con

$$\overline{\gamma_0} = \overline{\gamma_1} = \int_C \mu(Q)\, \frac{d}{dn}\, \rho_0^2\, ds \;;$$

$$\overline{\lambda'} = 2\,\overline{\mu'} = -2\int_C \mu(Q)\, \frac{d}{dn}(\rho_0 \cos\theta_0)\, ds \;;\; \overline{\lambda''} = 2\,\overline{\mu''} = -2\int_C \mu(Q)\, \frac{d}{dn}(\rho_0 \operatorname{sen}\theta_0)\, ds$$

$$\overline{b'_2} = \frac{1}{2}\int_C \mu(Q)\, \frac{d}{dn}(\rho_0^2 \cos 2\theta_0)\, ds \;;\; \overline{b''_2} = \frac{1}{2}\int_C \mu(Q)\, \frac{d}{dn}(\rho_0^2 \operatorname{sen} 2\theta_0)\, ds.$$

Le espressioni delle altre costanti $\overline{a'}_m$, $\overline{a''}_m$, $\overline{b'}_m$, $\overline{b''}_m$, che compaiono nel secondo membro dello sviluppo, sono, anch'esse, facilmente ottenibili.

Osserviamo che le funzioni

$$W(P) - \gamma_1 \log \rho - \gamma_2 \rho^2 \log \rho - \rho \log \rho (\lambda' \cos\theta + \lambda'' \operatorname{sen}\theta) -$$
$$- \rho (\mu' \cos\theta + \mu'' \operatorname{sen}\theta) - b'_2 \cos 2\theta - b''_2 \operatorname{sen} 2\theta ,$$
$$W_1(P) - \overline{\gamma_1} \log \rho - \rho \log \rho (\overline{\lambda'} \cos\theta + \overline{\lambda''} \operatorname{sen}\theta) -$$
$$- \rho (\overline{\mu'} \cos\theta + \overline{\mu''} \operatorname{sen}\theta) - \overline{b'_2} \cos 2\theta - \overline{b''_2} \operatorname{sen} 2\theta ,$$

sono convergenti all'infinito.

3. Siamo adesso in grado di dare il teorema della decomposizione di POINCARÉ per le funzioni bi-iperarmoniche in due variabili:

IV) *Sia* B_0 *un insieme aperto internamente connesso di punti del piano* (x, y), *limitato o no, e* $B_1, B_2, \ldots, B_p$ *insiemi chiusi e limitati, contenuti in* B_0, *a due a due privi di punti comuni, tali che esistano* $p+1$ *successioni di curve regolari, continue, semplici e chiuse, contenute nell'insieme aperto* $A = B_0 - B_1 - B_2 - \ldots - B_p$

$$[C_0^{(\nu)}], [C_1^{(\nu)}], \ldots, [C_p^{(\nu)}],$$

soddisfacenti alle seguenti proprietà:

1°) *comunque si prendano due curve, della medesima successione o di successioni diverse, esse non hanno punti in comune, e comunque si prenda* ν, *le curve* $C_1^{(\nu)}, \ldots, C_p^{(\nu)}$ *risultano esterne l'una all'altra e sono contenute in* $DC_0^{(\nu)}$;

2°) *ogni insieme* B_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ *è contenuto, qualunque sia* ν, *in* $DC_k^{(\nu)}$;

3°) *il dominio regolare* T_ν, *la cui completa frontiera è costituita dalle curve* $C_0^{(\nu)}, C_1^{(\nu)}, \ldots, C_p^{(\nu)}$, *invade* [8]), *al divergere di* ν, *l'insieme aperto* A.

Se $u(P)$ *è funzione bi-iperarmonica in* A, *fissati arbitrariamente i punti* $O_1(x_1, y_1), O_2(x_2, y_2), \ldots, O_p(x_p, y_p)$ *rispettivamente in* $B_1, B_2, \ldots, B_p$,

---

[8]) Si dice che una successione di domini contenuti nell'insieme aperto A

$$T_1, T_2, \ldots, T_\nu, \ldots$$

è invadente A, se ogni T_ν è contenuto in $T_{\nu+1}$ e per ogni insieme chiuso K contenuto in A esiste un dominio T_ν che lo contiene.

vale in ogni punto di A *la formola di decomposizione:*

$$u(P) = u_0(P) + u_1(P) + \ldots + u_p(P) +$$

$$(4) \qquad + \sum_{k=1}^{p} [\alpha_k \overline{O_k P}^2 + \beta_k (x - x_k) + \gamma_k (y - y_k) + \delta_k] \log \overline{O_k P} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} a_k \cos 2(\vec{x}, \vec{O_k P}) + b_k \operatorname{sen} 2(\vec{x}, \vec{O_k P})]$$

con u_0 *funzione bi-iperarmonica in* B_0 *e* u_k $(k \geq 1)$ *bi-iperarmonica in* CB_k *e convergente all'infinito.*

Le costanti che compaiono al secondo membro della (4) *riescono univocamente determinate ed hanno le seguenti espressioni:*

$$(5) \qquad \begin{cases} \alpha_k = \Phi[u, 1 \ ; \ FB_k], \\ \beta_k = -2\,\Phi[u, x - x_k \ ; \ FB_k], \\ \gamma_k = -2\,\Phi[u, y - y_k \ ; \ FB_k], \\ \delta_k = \Phi[u, \overline{O_k P}^2 \ ; \ FB_k], \\ a_k = \frac{1}{2}\Phi[u, \overline{O_k P}^2 \cos 2(\vec{x}, \vec{O_k P}) \ ; \ FB_k], \\ b_k = \frac{1}{2}\Phi[u, \overline{O_k P}^2 \operatorname{sen} 2(\vec{x}, \vec{O_k P}) \ ; \ FB_k]. \end{cases}$$

Le funzioni $u_0, u_1, \ldots, u_p$ *riescono invece ben determinate appena si assegnino i valori a* p *di esse rispettivamente in punti di* $B_0, CB_1, \ldots, CB_p$, *potendo considerare, in particolare, come valore nel punto* ∞, *il valore verso cui la funzione* u_k $(k \geq 1)$ *converge all'infinito.*

Poniamo, detta n_i la normale interna alla curva che si considera,

$$u_0^{(\nu)}(P) = \frac{1}{8\pi} \int_{C_0^{(\nu)}} \left[\overline{PQ}^2 \log \overline{PQ} \, \frac{d\,\Delta_2 u}{dn_i} - u \, \frac{d\,\Delta_2 (\overline{PQ}^2 \log \overline{PQ})}{dn_i} \right] ds(Q) +$$

$$+ \frac{1}{8\pi} \int_{C_0^{(\nu)}} \left[\Delta_2 (\overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}) \, \frac{du}{dn_i} - \Delta_2 u \, \frac{d\,(\overline{PQ}^2 \log \overline{PQ})}{dn_i} \right] ds(Q)$$

$$u_k^{(\nu)}(P) = \frac{1}{8\pi} \int_{C_k^{(\nu)}} \left[\overline{PQ}^2 \log \overline{PQ} \, \frac{d\,\Delta_2 u}{dn_e} - u \, \frac{d\,\Delta_2 (\overline{PQ}^2 \log \overline{PQ})}{dn_e} \right] ds(Q) +$$

$$+ \frac{1}{8\pi} \int_{C_k^{(\nu)}} \left[\Delta_2 (\overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}) \, \frac{du}{dn_e} - \Delta_2 u \, \frac{d\,(\overline{PQ}^2 \log \overline{PQ})}{dn_e} \right] ds(Q) -$$

$$-[\alpha_k \overline{O_k P}^2 + \beta_k (x-x_k) + \gamma_k (y-y_k) + \delta_k] \log \overline{O_k P} -$$
$$- a_k \cos 2(\vec{x}, \vec{O_k P}) - b_k \operatorname{sen} 2(\vec{x}, \vec{O_k P}) - \frac{1}{2}\beta_k (x-x_k) - \frac{1}{2}\gamma_k (y-y_k)$$
$$(k=1,2,\ldots,p),$$

le costanti $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k, a_k, b_k$ essendo definite dalle (5).

La funzione $u_0^{(\nu)}$ riesce bi-iperarmonica in tutto il piano privato dei punti di $C_0^{(\nu)}$; la $u_k^{(\nu)}$ lo è in tutto il piano privato dei punti di $C_k^{(\nu)}$ ed è inoltre, come andiamo a dimostrare, convergente all'infinito.

Ed invero nello sviluppo in serie all'infinito di $u_k^{(\nu)}(P)$ i coefficienti dei termini che non sono convergenti all'infinito sono nulli. Faremo vedere ciò, per esempio, per il coefficiente di $\log \overline{O_k P}$. Supponiamo di avere sviluppato in serie uniformemente convergenti all'esterno di un certo cerchio di centro O_k, nel modo visto al n.° 2, i quattro potenziali, che intervengono nell'espressione di $u_k^{(\nu)}$:

$$\frac{1}{8\pi}\int_{C_k^{(\nu)}} \overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}\, \frac{d\Delta_2 u}{dn_e}\, ds(Q),$$

$$\frac{1}{8\pi}\int_{C_k^{(\nu)}} u\, \frac{d\Delta_2(\overline{PQ}^2 \log \overline{PQ})}{dn_e}\, ds(Q) \equiv \frac{1}{8\pi}\int_{C_k^{(\nu)}} u\, \frac{d(4\log \overline{PQ}+4)}{dn_e}\, ds(Q),$$

$$\frac{1}{8\pi}\int_{C_k^{(\nu)}} \Delta_2(\overline{PQ}^2 \log \overline{PQ})\, \frac{du}{dn_e}\, ds(Q) \equiv \frac{1}{8\pi}\int_{C_k^{(\nu)}} \frac{du}{dn_e}(4\log \overline{PQ}+4)\, ds(Q),$$

$$\frac{1}{8\pi}\int_{C_k^{(\nu)}} \Delta_2 u\, \frac{d(\overline{PQ}^2 \log \overline{PQ})}{dn_e}\, ds(Q).$$

Il secondo di essi riesce convergente all'infinito (cfr. n.° 2) mentre non così accade degli altri tre. Il coefficiente del termine logaritmico puro è nello sviluppo di ciascuno di essi rispettivamente uguale a

$$\frac{1}{8\pi}\int_{C_k^{(\nu)}} \frac{d\Delta_2 u}{dn_e}\, \overline{O_k Q}^2\, ds(Q); \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{C_k^{(\nu)}} \frac{du}{dn_e}\, ds(Q); \qquad \frac{1}{8\pi}\int_{C_k^{(\nu)}} \Delta_2 u\, \frac{d}{dn_e}\, \overline{O_k Q}^2\, ds(Q).$$

Abbiamo così nello sviluppo di $u_k^{(\nu)}$, che si ottiene all'esterno del cerchio di centro O_k già menzionato, quando si siano sviluppati i potenziali in questione, il coefficiente di $\log \overline{O_k P}$:

$$\frac{1}{8\pi}\int_{C_k^{(\nu)}} \frac{d\Delta_2 u}{dn_e}\, \overline{O_k Q}^2\, ds(Q) + \frac{1}{2\pi}\int_{C_k^{(\nu)}} \frac{du}{dn_e}\, ds(Q) - \frac{1}{8\pi}\int_{C_k^{(\nu)}} \Delta_2 u\, \frac{d}{dn_e}\, \overline{O_k Q}^2\, ds(Q) - \delta_k.$$

Tenendo presente l'espressione di δ_k e osservando che

$$\frac{4}{8\pi}\int_{C_k^{(\nu)}} \frac{du}{dn_e}\,\overline{O_kQ}^2\,ds(Q) + \frac{1}{2\pi}\int_{C_k^{(\nu)}} \frac{du}{dn_e}\,ds(Q) - \frac{1}{8\pi}\int_{C_k^{(\nu)}} \Delta_2 u\,\frac{d}{dn}\,\overline{O_kQ}^2\,ds(Q) =$$

$$= \Phi\left[u\,,\ \overline{O_kP}^2\,;\ FB_k\right]$$

segue quanto avevamo asserito.

Per il teorema II, in ogni punto P interno a T_ν si ha:

$$\begin{aligned} u(P) = {} & u_0^{(\nu)}(P) + u_1^{(\nu)}(P) + \ldots + u_p^{(\nu)}(P) + \\ & + \sum_{k=1}^{p}\left[\alpha_k\,\overline{O_kP}^2 + \beta_k(x-x_k) + \gamma_k(y-y_k) + \delta_k\right]\log\overline{O_kP} + \\ & + \sum_{k=1}^{p}\left[a_k\cos 2\,(\vec{x}\,,\,\vec{O_kP}) + b_k\,\mathrm{sen}\,2\,(\vec{x}\,,\,\vec{O_kP})\right] + \\ & + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\left[\beta_k(x-x_k) + \gamma_k(y-y_k)\right]. \end{aligned} \tag{4'}$$

Detto P un qualsivoglia punto di CB_k $(k \geq 1)$, indichiamo con $\nu_0(P)$ un numero intero e positivo tale che per ogni $\nu > \nu_0(P)$ il punto P sia esterno alla curva $C_k^{(\nu)}$. Supposto fisso P, le funzioni $u(Q)$ e $\overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}$ riescono bi-iperarmoniche nel dominio che ha per completa frontiera le curve $C_k^{(\nu)}$ e $C_k^{(\nu+\mu)}$ essendo μ un qualsivoglia intero positivo; segue, allora, per il teor. I:

$$u_k^{(\nu+\mu)}(P) = u_k^{(\nu)}(P)\,,$$

epperò la funzione $u_k^{(\nu)}(P)$, al divergere di ν, converge verso una funzione $u_k(P)$ bi-iperarmonica in CB_k; e poichè per ogni punto P esterno a $C_k^{(\nu)}$ risulta

$$u_k(P) = u_k^{(\nu)}(P)\,,$$

la funzione $u_k(P)$ è convergente all'infinito.

Con ragionamento analogo si vede che $u_0^{(\nu)}$, al divergere di ν, converge verso una funzione bi-iperarmonica in B_0.

Dalla (4') passando al limite per $\nu \to \infty$ e avendo posto:

$$u_0(P) = \lim_{\nu \to \infty} u_0^{(\nu)}(P) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} \left[\beta_k (x - x_k) + \gamma_k (y - y_k) \right],$$

si ottiene per ogni punto di A la (4).

Dimostriamo adesso l'unicità delle costanti al secondo membro della (4) e l'asserito grado d'indeterminazione delle funzioni $u_0, u_1, \ldots, u_p$. Supponiamo allora che in ogni punto di A valga un'altra decomposizione del tipo della (4), con $u'_0(P)$ bi-iperarmonica in B_0 e $u'_k(P)$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ in CB_k e convergente all'infinito:

$$u(P) = u'_0(P) + u'_1(P) + \ldots + u'_p(P) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} \left[\alpha'_k \overline{O_k P}^2 + \beta'_k (x - x_k) + \gamma'_k (y - y_k) + \delta'_k \right] \log \overline{O_k P} +$$

(4'')

$$+ \sum_{k=1}^{p} \left[a'_k \cos 2 (\vec{x}, \overrightarrow{O_k P}) + b'_k \operatorname{sen} 2 (\vec{x}, \overrightarrow{O_k P}) \right].$$

Detto h $(h = 1, 2, \ldots, p)$ un indice $\neq k$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ e w_h una qualunque delle funzioni che compaiono nelle Σ al secondo membro della (4''), in virtù del teor. I, si ha:

$$\Phi [u'_0, \overline{O_k P}^2 \; ; \; FB_k] = \Phi [u'_h, \overline{O_k P}^2 \; ; \; FB_k] = \Phi [w_h, \overline{O_k P}^2 \; ; \; FB_k] = 0.$$

D'altra parte, come è noto [3]), assunto un sistema di coordinate polari (ρ, θ) con polo in O_k, valgono all'esterno di un certo cerchio di centro O_k e raggio ρ' gli sviluppi:

$$u'_k = c_0 + \frac{T'_1(\theta)}{\rho} + \sum_{m=2}^{\infty} \left[\frac{T'_m(\theta)}{\rho^m} + \frac{T''_m(\theta)}{\rho^{m-2}} \right]$$

$$\frac{\partial u'_k}{\partial \rho} = - \frac{T'_1(\theta)}{\rho^2} - \sum_{m=2}^{\infty} \left[m \frac{T'_m(\theta)}{\rho^{m+1}} + (m-2) \frac{T''_m(\theta)}{\rho^{m-1}} \right],$$

[3]) Cfr. M. Picone loc. cit. (4) e G. Fichera, *Sviluppi in serie etc.* [loc. cit. (5)].

$$\Delta_2 u'_k = \sum_{m=2}^{\infty} 4(1-m)\frac{T'_m(\theta)}{\rho^m} \quad , \quad \frac{\partial \Delta_2 u'_k}{\partial \rho} = -\sum_{m=2}^{\infty} 4m(1-m)\frac{T'_m(\theta)}{\rho^{m+1}} \quad ,$$

dove $T'_m(\theta)$ e $T''_m(\theta)$ sono binomî trigonometrici d'ordine m. Tali sviluppi sono uniformemente convergenti all'esterno del detto cerchio. Se indichiamo adesso con Γ_k un arbitrario cerchio di centro O_k e di raggio $R > \rho'$, si ha:

$$\Phi[u_k, \overline{O_k P}^2 ; FB_k] = \Phi[u'_k, \overline{O_k P}^2 ; \Gamma_k],$$

ma è:

$$\Phi[u'_k, \overline{O_k P}^2 ; \Gamma_k] = \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} R^3 \frac{\partial \Delta_2 u'_k}{\partial R} d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R \frac{\partial u'_k}{\partial R} d\theta - \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} R^2 \Delta_2 u'_k \, d\theta,$$

e poichè, tenendo presenti gl'indicati sviluppi, si ha:

$$\int_0^{2\pi} R^3 \frac{\partial \Delta_2 u'_k}{\partial R} d\theta = \int_0^{2\pi} R \frac{\partial u'_k}{\partial R} d\theta = \int_0^{2\pi} R^2 \Delta_2 u'_k \, d\theta = 0 \ ,$$

segue che:

$$\Phi[u'_k, \overline{O_k P}^2 ; \Gamma_k] = 0.$$

Si ha anche, eseguendo il semplicissimo calcolo degli operatori Φ su Γ_k:

$$\Phi[\overline{O_k P}^2 \log \overline{O_k P}, \overline{O_k P}^2 ; FB_k] = \Phi[\overline{O_k P}^2 \log \overline{O_k P}, \overline{O_k P}^2 ; \Gamma_k] = 0,$$

$$\Phi[(x-x_k)\log \overline{O_k P}, \overline{O_k P}^2 ; FB_k] = \Phi[(x-x_k)\log \overline{O_k P}, \overline{O_k P}^2 ; \Gamma_k] = 0,$$

$$\Phi[(y-y_k)\log \overline{O_k P}, \overline{O_k P}^2 ; FB_k] = \Phi[(y-y_k)\log \overline{O_k P}, \overline{O_k P}^2 ; \Gamma_k] = 0 \ ,$$

$$\Phi[\cos 2(\vec{x}, \vec{O_k P}), \overline{O_k P}^2 ; FB_k] = \Phi[\cos 2(\vec{x}, \vec{O_k P}), \overline{O_k P}^2 ; \Gamma_k] = 0,$$

$$\Phi[\operatorname{sen} 2(\vec{x}, \vec{O_k P}), \overline{O_k P}^2 ; FB_k] = \Phi[\operatorname{sen} 2(\vec{x}, \vec{O_k P}), \overline{O_k P}^2 ; \Gamma_k] = 0 \ ,$$

mentre risulta:

$$\Phi[\log \overline{O_k P}, \overline{O_k P}^2 ; FB_k] = \Phi[\log \overline{O_k P}, \overline{O_k P}^2 ; \Gamma_k] = 1.$$

Applicando, quindi, l'operatore

$$\Phi[f, \overline{O_k P}^2 ; FB_k]$$

ai due membri della (4''), si ha:

$$\Phi[u, \overline{O_k P}^2 ; FB_k] = \delta'_k ,$$

cioè;

$$\delta_k = \delta'_k .$$

Con analogo procedimento e applicando ogni volta ai due membri della (4'') l'operatore Φ che nelle (5) dà il valore di ciascuna costante, si vede che:

$$\alpha_k = \alpha'_k , \quad \beta_k = \beta'_k , \quad \gamma_k = \gamma'_k , \quad a_k = a'_k , \quad b_k = b'_k .$$

Poniamo adesso:

$$r_k = u_0 + \ldots + u_{k-1} + u_{k+1} + \ldots + u_p , \quad r'_k = u'_0 + \ldots + u'_{k-1} + u_{k+1} + \ldots + u_p$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p) .$$

Si ha in A, tenendo presenti la (4) e la (4''):

$$u_k - u'_k = r'_k - r_k .$$

La funzione $u_k - u'_k$ è bi-iperarmonica in CE_k, mentre la funzione $r'_k - r_k$ lo è in $A + B_k$, e quindi la funzione bi-iperarmonica w così definita:

$$w \begin{cases} = u_k - u'_k \text{ in } CB_k , \\ = r'_k - r_k \text{ in } B_k \end{cases}$$

è intera e convergente all'infinito. Essa si riduce quindi ad una costante

che indicheremo con $-c_k$ [10]). Si ottiene allora:

$$u'_1 = u_1 + c_1 \ , \ u'_2 = u_2 + c_2 , \ldots , u'_p = u_p + c_p , u'_0 = u_0 - (c_1 + c_2 + \ldots + c_p).$$

Il teorema resta così completamente dimostrato.

Osserviamo che se u si suppone armonica in A, risulta

$$\alpha_k = \beta_k = \gamma_k = a_k = b_k = 0$$

e sono armoniche le funzioni u_0, u_1, $\ldots$, u_p; si ritrova quindi la formola di decomposizione di POINCARÉ per le funzioni armoniche [11]).

4. Vogliamo adesso dare, servendoci degli operatori Φ, una forma più compatta alla formola di decomposizione (4).

Tenendo presenti le (5) e dette x_0 e y_0 le coordinate cartesiane di Q si ha:

$$\alpha_k \overline{O_k P}^2 + \beta_k (x - x_k) + \gamma_k (y - y_k) + \delta_k =$$

$$= \Phi [u, \overline{O_k P}^2 - 2(x_0 - x_k)(x - x_k) - 2(y_0 - y_k)(y - y_k) + \overline{O_k Q}^2 \ ; FB_k] =$$

$$= \Phi [u, \overline{PQ}^2 \ ; \ FB_k] \ ,$$

$$a_k \cos 2(\vec{x}, \vec{O_k P}) + b_k \operatorname{sen} 2(\vec{x}, \vec{O_k P}) =$$

---

[10]) Che una funzione bi-iperarmonica intera w convergente all'infinito si riduca ad una costante è ben noto e segue dal fatto che, per ogni punto del piano (ρ, θ), deve aversi:

$$w = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[a'_m \rho^{|m|} + a''_m \rho^{|m|+2} \right] e^{im\theta}$$

con

$$(6) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(\rho, \theta) e^{im\theta} d\theta = a'_m \rho^{|m|} + a''_m \rho^{|m|+2}.$$

Dovendo w essere convergente all'infinito, dalla (6), facendo tendere ρ all'infinito, si deduce:

$$a'_m = 0 \ (\textit{per } m \neq 0) \quad , \quad a''_m = 0 \ (\textit{per ogni } m) \ ,$$

e quindi:

$$w = a'_0.$$

[11]) Cfr. PICONE, loc. cit. [3]) pp. 291-294.

$$= \frac{1}{2}\Phi[u, \overline{O\,Q}^2 \{\cos 2(\vec{x}, \vec{O_k Q})\cos 2(\vec{x}, \vec{O_k P}) + \operatorname{sen} 2(\vec{x}, \vec{O_k Q})\operatorname{sen} 2(\vec{x}, \vec{O_k P})\}; FB_k] =$$

$$= \frac{1}{2}\,\Phi[u, \overline{O_k Q}^2 \cos 2(\vec{O_k Q}, \vec{O_k P})\ ;\ FB_k]\ .$$

Otteniamo quindi dalla (4) in ogni punto di A:

$$u(P) = u_0(P) + u_1(P) + \ldots + u_p(P) +$$

$$\sum_{k=1}^{p} \Phi[u, \overline{P\,Q}^2\ ;\ FB_k] \log \overline{O_k P} + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2}\,\Phi[u, \overline{O_k Q}^2 \cos 2(\vec{O_k Q}, \vec{O_k P}); FB_k].$$

L'espressione, alla quale così si perviene, dell'ottenuta formola di decomposizione, mette in vista che la funzione, che al secondo membro moltiplica $\log \overline{O_k P}$, *non dipende da* O, circostanza, questa, molto notevole. Per modo che ciascuna funzione

$$\Phi[u, \overline{P\,Q}^2\ ;\ FB_k]$$

è una ben determinata funzione di P che dipende unicamente dal tipo delle singolarità che l'assegnata funzione u ha in B_k.

Roma, maggio 1941 - XIX.

Nuovi esperimenti di usura sulle « scarpe » per le funi portanti delle funivie

Nota dell' ing. **Camillo Zocchi,** *presentata dal socio* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 9 novembre 1940-XIX)

Questa nota verrà inserita in un prossimo fascicolo.

Statistica di configurazioni.
(Ricerche su coppie di variabili casuali in correlazione).

Nota del socio corr. **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 7 giugno 1941 - XIX)

Sunto. — La nota qui sviluppata è un contributo all'uso sistematico delle matrici negli schemi di evoluzione di collettività.

L'accenno è rivolto pricipalmente a fenomeni meteorologici; ma lo schema studiato può essere usato in qualsiasi fenomeno nel quale a fianco di individui di primo ordine vengono considerati individui di secondo ordine dati da coppie di quelli (padre-figlio; marito-moglie; fratelli etc. etc.). Implicitamente viene così ripreso e delineato il concetto (già definito dall'A.) di coppia di variabili mutuamente casuali.

1. *Premesse sulle configurazioni.*

Intenderemo per «configurazione» un gruppo ordinato di caratteri atti a fissare vari tipi nel modo col quale si può presentare un complesso di fenomeni.

Tale gruppo di caratteri non ha — almeno in generale — veste numerica tale da poterlo rappresentare mediante gruppi fissi di numeri o di coordinate; tuttavia, pur nella sua indeterminatezza in tale senso, deve essere sufficiente a caratterizzare particolari classi di possibili svolgimenti del fenomeno in esame.

Così, parlando di un grafico, si potrà parlare di «configurazione», del grafico stesso (nel nostro senso statistico, beninteso) a seconda del numero dei massimi e dei minimi che esso grafico presenta, a prescindere dal punto in cui essi si verificano e dal valore ivi assunto.

Oppure, parlando di una corda vibrante, si potrà parlare di configurazione diversa a seconda del diverso numero di nodi o di ventri.

In questa breve esposizione avremo principalmente di mira il fatto meteorologico. In tal caso, considerando i grafici meteorologici (curve isobare, o isoterme etc.) in una certa regione, noi saremo portati a parlare di configurazioni diverse a seconda del numero dei centri ciclonici, centri anticiclonici, di istmi etc. È chiaro che una più intima applicazione della statistica alla meteorologia (sia per quanto riguarda regolarità statistica che per quanto riguarda la ricerca di legge empiriche) non si possa limitare a prendere in esame soltanto serie di numeri quali temperatura, pressione, igrometria etc., ma debba di necessità studiare anche (e forse prin-

cipalmente) l'evolversi ed il succedersi di queste configurazioni nel tempo: il loro mutuo condizionarsi (ad esempio fra configurazione barometrica e quella termometrica) ed in generale la loro interdipendenza. Però il metodo che daremo può ben essere applicato a problemi diversi da quelli indicati; più che altro è una quistione di metodologia che qui svilupperemo e che si collega a tutte le nostre ricerche sulle collettività pubblicate da alcuni anni in questi Rendiconti.

2. *Premesse sulle variabili casuali.*

Sia assegnato un certo complesso di modi vari con i quali si è presentato un fenomeno; e questo complesso sia stato controdistinto in base a due caratteri: Il primo H con le modalità $H_1, H_2, \ldots H_m$; il secondo K con le modalità $K_1, K_2, \ldots K_n$.

Il fenomeno stesso può ridursi alla semplice coesistenza di H e di K oppure alla consecutività di K ad H: nel tempo o nello spazio (in tal caso H «precede» K).

Nel primo caso si tratta di coppia non ordinata, nel secondo (più generale) di coppia ordinata.

Comunque il carattere K potrebbe anche coincidere con H; ed in tal caso il fenomeno consiste nella presenza, in diverso grado, ma simultaneamente di H in due individui di primo ordine riunitisi a formarne uno di secondo (coppia matrimoniale, coppia fraterna etc.).

Però potrebbe anche consistere nella presenza *non* più simultanea, ma successiva di due diverse modalità di H nello stesso individuo (evoluzione di caratteri) o in individui diversi (ereditarietà di caratteri) di cui uno successivo ad un altro.

In una collettività G di ν, in individui vi sia dunque il seguente quadro di distribuzione:

$H \equiv$	H_1	H_2	H_3	....	H_m	
$K \equiv$ K_1	ν_{11}	ν_{12}	ν_{13}	....	ν_{1m}	ν''_1
K_2	ν_{21}	ν_{22}	ν_{23}	....	ν_{2m}	ν''_2
K_3	ν_{31}	ν_{32}	ν_{33}	....	ν_{3m}	ν''_3
..	....	....	....	....	....	....
K_n	ν_{n1}	ν_{n2}	ν_{n3}	....	ν_{nm}	ν''_n
	ν'_1	ν'_2	ν'_3	....	ν'_m	ν

nel quale ν_{rs} indica il numero di individui che hanno la presenza del carattere H con la modalità h_s e del carattere K con quella k_r; ν'_s la totalità di tutti gli individui che hanno il carattere H con la modalità h_s e ν''_r di quelli che hanno il carattere K con la modalità k_r; sicchè

$$\begin{cases} \nu''_s = \nu_{1s} + \nu_{2s} + \dots + \nu_{ns} \\ \nu''_r = \nu_{r1} + \nu_{r2} + \dots + \nu_{rm} \\ \nu = \sum_1^m \nu'_s = \sum_1^n \nu''_r \end{cases}$$

In corrispondenza a questo quadro di distribuzione vi sono le tre tabelle di frequenze (si potrebbe anche parlare di probabilità):

$$P' \equiv (p'_1, p'_2, \dots p'_m) \qquad p'_s = \frac{\nu'_s}{\nu}$$

$$P'' \equiv (p''_1, p''_2, \dots p''_n) \qquad p''_r = \frac{\nu''_r}{\nu}$$

$$P \equiv \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nm} \end{Vmatrix} \qquad p_{rs} = \frac{\nu_{rs}}{\nu}$$

$$\Sigma p'_s = \Sigma p''_r = \Sigma p_{rs} = 1 \quad ; \quad \sum_s p_{rs} = p''_r \quad ; \quad \sum_r p_{rs} = p'_s \quad ; \quad \sum_{rs} p_{rs} = 1,$$

rispettivamente per il carattere H, per il carattere K e per il carattere (H, K).

Osserviamo che se si considerano tutti gli individui aventi già il carattere H_s, la loro distribuzione in classi rispetto al carattere K avviene con la legge

$$\frac{p_{1s}}{p'_s} \quad , \quad \frac{p_{2s}}{p'_s} \quad , \quad \dots \quad \frac{p_{ns}}{p'_s}$$

mentre se si considerano tutti quelli aventi già il carattere K_r la loro distribuzione in classi rispetto al carattere H avviene con la legge

$$\frac{p_{r1}}{p''_r} \quad , \quad \frac{p_{r2}}{p_r} \quad , \quad \dots \quad \frac{p_{rm}}{p''_m}$$

3. *Le vaviabili mutuamente casuali ed il gruppo delle evoluzioni.* A fianco della matrice P, si devono calcolare abitualmente due altre matrici; una di « filiazione » consistente proprio nel considerare il passaggio

da H a K, l'altra di «generazione» consistente nel considerare il passaggio da K ad H; esse sono costituite precisamente nai rapporti sopraindicati, cioè:

$$P^* \equiv \left\| \begin{matrix} \varphi_{11} \cdots \varphi_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{m1} \cdots \varphi_{mn} \end{matrix} \right\| \quad , \qquad \varphi_{rs} = \frac{p_{rs}}{p'_s} = \frac{p_{rs}}{p_{1s} + \cdots + p_{ms}}$$

e

$$^*P \equiv \left\| \begin{matrix} \gamma_{11} \cdots \gamma_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \gamma_{m1} \cdots \gamma_{mn} \end{matrix} \right\| \quad , \qquad \gamma_{rs} = \frac{p_{rs}}{p''_r} = \frac{p_{rs}}{p_{r1} + \cdots + p_{rn}}$$

avendo la prima l'unità come somma delle sue colonne, e la seconda invece come somma delle sue linee; il prodotto di due matrici dello stesso tipo (primo o secondo) è ancora una dello stesso tipo, cioè esse formano gruppo, per ciascun tipo.

È chiaro che a lor volta sarà

$$p_{rs} = \varphi_{rs}\, p'_s \quad ; \quad p_{rs} = \gamma_{rs}\, p''_r$$

Si riottiene in tal modo precisamente il concetto di coppie di variabili mutuamente casuali; queste sono il carattere H nelle sue modalità $H_1, \ldots H_m$; e quello K nelle sue modalità $K_1 \ldots K_n$.

Resta per tale via fissato anche un carattere gruppale delle evoluzioni.

Si abbia una collettività C distribuita rispetto ad un carattere H; essa evolva in un'altra C' che sia ridistribuita ancora rispetto ad H (in questo caso $m = n$, e le matrici sono matrici quadrate). Sia F lo stadio originario; G il secondo ed L quello finale. Può avvenire che o lo stesso individuo di G muti in evoluzione la classe H_r cui apparteneva, oppure che esso sparisca dando origine ad un nuovo individuo di classe diversa.

Supporremo sempre che i singoli passaggi sieno indipendenti fra loro; e che quindi un passaggio non ne subordini simultaneamente un altro, nè che un primo ne subordini successivamente un secondo.

Comunque, si viene ad esaminare in seno alla collettività C composta di individui di primo ordine, la collettività C^* costituita da coppie ordinate di suoi individui, presentanti il carattere (H_r, H_s) costituite dalle coppie ordinate di due modalità di H, in base al quale si era classificata la C.

È ovvio che due passaggi consecutivi dànno luogo ad un passaggio diretto dalla collettività originaria a quella finale. E che pertanto queste

evoluzioni presentano carattere gruppale. Se $[P]$ indica il passaggio da F a G, e $[Q]$ il passaggio da G ad L sarà ovviamente

$$G = [P]F \quad ; \quad L = [Q]G \quad ; \quad L = [R]F$$

essendo $[R]$ un passaggio da costruire a partire da $[P]$ e da $[Q]$.

Per chiarire meglio tale schema di passaggio, consideriamo due passaggi consecutivi da uno stadio F ad uno stadio G, e da questo ad uno L, sempre classificando in base allo stesso carattere H (che supporremo per brevità dicotomico nelle classi H_1, H_2).

La suddivisione nello stadio F sia caratterizzata dalle frequenze f_1, f_2 nelle due classi; quello dello stadio G dalle frequenze g_1, g_2; quella dello stadio L dalle frequenze l_1, l_2.

Dunque gli schemi di passaggio saranno rispettivamente

	$F \equiv$	H_1	H_2	
$G \equiv$	H_1	p_{11}	p_{12}	g_1
	H_2	p_{21}	p_{22}	g_2
		f_1	f_2	1

	$G \equiv$	H_1	H_2	
$L \equiv$	H_1	q_{11}	q_{12}	l_1
	H_2	q_{21}	q_{22}	l_2
		g_1	g_2	1

essendo:

$$p_{11} + p_{12} = g_1 \quad ; \quad p_{21} + p_{22} = g_2 \quad ; \quad p_{11} + p_{21} = f_1 \quad ; \quad p_{12} + p_{22} = f_2$$

$$q_{11} + q_{12} = l_1 \quad ; \quad q_{21} + q_{22} = l_2 \quad ; \quad q_{11} + q_{21} = g_1 \quad ; \quad q_{12} + q_{22} = g_2$$

Per avere il passaggio diretto dalla F alla L osserviamo che gli F della prima classe H_1, si distribuiscono nella G rispettivamente nella prima e seconda classe, con le frequenze (relativa alla sola H_1 di F)

$$\frac{p_{11}}{f_1} \quad , \quad \frac{p_{21}}{f_1} .$$

A lor volta di questi passano dalla prima classe dello stadio G alla prima classe dello stadio L secondo la frequenza, rispettivamente

$$\frac{q_{11}}{g_1} \quad , \quad \frac{q_{12}}{g_2}$$

con maggior precisione. Il numero totale di elementi è n; di questi appartengono alle due classi di F rispettivamente nf_1 , nf_2 , dei primi ne passano np_{11} alla prima classe di G ed np_{21} alla seconda classe di G stesso.

A lor volta della prima classe di G ne passano $(np_{11})\ q_{11}$ alla prima classe di L, e dalla seconda classe di G ne passano $(np_{21})\ q_{12}$ alla stessa prima classe di L.

In definitiva, dalla prima classe di F sono passati alla prima di L, (traversando via la prima che la seconda di G) il numero

$$n\,p_{11}\,q_{11} + n\,p_{21}\,q_{12} = n\,(p_{11}\,q_{11} + p_{21}\,q_{12})$$

In modo perfettamente analogo si trovano che i passaggi dalla prima classe di G alla seconda di L sono in numero rispettivo di

$$n\,(p_{11}\,q_{21} + p_{21}\,q_{22})$$

e così via.

Tale passaggio si effettua attraverso le matrici P^* e Q^* già introdotte. Dovremo dunque porre:

$$G = P^* \cdot F \quad ; \quad L = Q^*\,G$$

e quindi

$$L = Q^*\,P^*\,F = R^*\,F$$

essendo R^* precisamente la matrice prodotto di Q^* e P^* (essendo questo il primo fattore) secondo le comuni regole del prodotto.

Naturalmente è presupposta la assoluta indipendenza nelle scelte che effettuano i due passaggi; in altri termini la scelta del secondo passaggio si attua egualmente e nello stesso modo, qualunque sia stata la scelta precedente.

4. *Impostazione del problema.*

Si abbia dunque un fenomeno che si presenti possibile con le diverse configurazioni, ... H; e sieno esse H' , H'' .... $H^{(m)}$ nel tempo e ad intervalli eguali si sieno riscontrate successivamente le configurazioni formantesene statistica:

$$[H] \equiv H^{(1)}\ ,\ H^{(2)}\ ,\ \ldots .\ H^{(m)}\ \ldots .$$

Ci proponiamo di caratterizzare statisticamente la serie $[H]$.

Alcuni dei suoi caratteri sono banali ed immediati. Così ad esempio uno è dato dalle frequenze a_ρ delle singole configurazioni tipo H_ρ fra quelle presentatesi $H^{(m)}$.

Un secondo (terzo, etc.) carattere numerico banale si può avere considerando la frequenza delle coppie consecutive; cioè quante volte la coppia ordinata H_ρ, H_σ figura fra le coppie rilevate $H^{(1)}$, $H^{(2)}$; $H^{(2)}$, $H^{(3)}$; (oppure fra $H^{(1)}$, $H^{(3)}$; $H^{(2)}$, $H^{(4)}$; $H^{(3)}$, $H^{(5)}$, oppure fra $H^{(1)}$, $H^{(4)}$; $H^{(2)}$, $H^{(5)}$.... etc....).

E naturalmente questi caratteri numerici banali possono aumentare considerando anche le terne o le quaterne e così via.

Ma è chiaro che il problema fondamentale *non può* consistere nella semplice descrizione della serie statistica $[H]$ col solo rilievo di tutti questi caratteri statistici banali ora indicati.

Sebbene vanno impostati e risolti i seguenti tre problemi fondamentali:

I. *E' casuale l'evoluzione del fenomeno* H *da una configurazione alla successiva nel tempo, oppure è soggetta a leggi selettive?*

Ed in qual grado?

II. *Vi sono fattori di ereditarietà, per cui l'evoluzione viene influenzata dagli stadi precedenti?*

Ed in qual grado?

III. *Date due diverse serie di configurazioni dello stesso fenomeno (cioè due suoi aspetti), esse sono interdipendenti oppure indipendenti?*

Ed in qual grado?

Per mostrare che questi problemi sono effettivamente posti dalla realtà ricordiamo un fatto meteorologico ben noto.

Cioè che pur essendo, in certe zone, i giorni di buon tempo statisticamente in numero eguali a quelli di cattivo tempo, vi è tuttavia una sola probabilità contro tre che il tempo varii da un giorno al consecutivo.

Ciò significa semplicemente che giorni «buoni» e «cattivi» si alternano in media, a serie di tre giorni di un tipo e di tre dell'altro tipo («buono» e «cattivo» essendo le due modalità della configurazione tempo, prescelte).

E si vede chiaramente che in tal modo si risponde precisamente al primo ed al secondo problema.

La risposta ad essi può essere data solo seguendo il metodo delle matrici dianzi accennato.

5. *Esame dei tre problemi.*

I tre problemi vanno esaminati in base ai metodi già esplicitamente dati nelle note precedenti.

Se noi consideriamo tutta la distribuzione delle configurazioni rilevate $H^{(1)}$, $H^{(2)}$, ... $H^{(m)}$.... fra quelle adottate per la classifica H_1, H_2, ... H_n

potremo costruire una tabella di passaggio, formando le coppie $H^{(\rho)}$, $H^{(\rho+1)}$ quali elementi di secondo ordine.

Si valutino prima le frequenze p', p'' (sarà $p'_s = p''_r$).

Formiamo poi la già detta matrice delle P (o quella delle F e quella delle G).

Se la distribuzione è casuale; allora si dovrà avere:

$$p_{r,s} = p''_r \, p'_s = p'_r \, p''_s$$

Perciò resta caratterizzata quella che abbiamo altrove chiamata «distribuzione spontanea».

Se questo non è, il divario fra la distribuzione rilevata e quella spontanea darà la misura della selettività esistente nel fenomeno: basterà applicare uno qualunque degli indici costruiti in altri nostri lavori per ottenere questa misura.

In tal modo resta definito il primo problema ed indicata la via per la sua effettiva, concreta, risoluzione.

In quanto al secondo problema, noi costruiremo altresì le matrici di passaggio

$$\begin{cases} P' \, , Q' \text{ ; fra ogni stadio ed il suo successivo.} \\ P'' ; Q' \text{ fra ogni stadio ed il suo secondo successivo.} \end{cases}$$

. . . . . .

È chiaro che se la legge di passaggio è invariabile e non è collegata ad alcun fenomeno di ereditarietà, allora il passaggio dalle $H^{(\rho)}$ ad $H^{\rho+1)}$, applicato due volte consecutivamente deve dare il passaggio dalle $H^{(\rho)}$ alle $H^{(\rho+2)}$.

Quindi, dovrà risultare

$$Q'' = (Q')^2 \quad ; \quad Q''' = (Q')^3 ;$$

Il divario esistente fra Q'' ed $(Q')^2$ darà la misura dell'influenza di uno stadio a distanza di due passaggi: e tralasciamo per ora di sviluppare in qual modo si possa rilevare l'influsso a distanza di tempo.

In quanto al terzo problema, anch'esso si può spezzare in uno di interdipendenza immediata ed uno di interdipendenza ereditaria.

Per lo studio la interdipendenza immediata, supponiamo di voler osservare quello che avviene fra due aspetti H e K del fenomeno.

H si presenti con le configurazioni $H_1, H_2, \ldots H_m$

K si presenti con le configurazioni $K_1, K_2, \ldots K_n$

ed invece la rilevazione temporale porti alle consecutive configurazioni:

$$\begin{cases} H^{(1)}, H^{(2)}, \ldots, H^{(p)}, \\ K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(p)} \ldots \end{cases}$$

ed in queste la H_r figuri con la frequenza h_r, la K_s con le frequenza k_s

Formiamo adesso gli elementi di secondo ordine

$$(H_\rho , K_\sigma)$$

e di questi misuriamo la frequenza fra le coppie rilevate $(H^{(1)} , K^{(1)})$, $(H^{(2)} , K^{(2)}), \ldots .$, formando il quadro di correlazione

$$L \equiv \left\| \begin{matrix} l_{11} , \ldots \ldots l_{1\,m} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \\ l_{n1} , \ldots \ldots l_{n\,m} \end{matrix} \right\|$$

Anche qui il divario esistente fra questa matrice e quella i cui elementi sono

$$h_r \quad k_s$$

ci darà la misura della casualità del collegamento.

Se esse coincidono i caratteri H e K sono indipendenti fra loro; se invece la L presenta genericamente elementi nulli salvo uno in ogni linea ed uno in ogni colonna, si ha fra i caratteri H e K una dipendenza matematica (e strettissima quindi).

6. *Conclusioni.*

Risultano posti in rilievo i tre problemi fondamentali per una teoria statistica della evoluzione di collettività o di fenomeni.

Tutti i tre problemi si riconducono sempre all'esame di matrici statistiche; quindi resta impostato l'uso e il modo di uso di queste matrici.

Caratterizzare gli indici più acconci a misurare il divario fra due matrici (divario il cui calcolo, come si è visto diventa basilare) è stato già fatto parzialmente nei nostri precedenti lavori.

L'uso sistematico degli indici ivi indicati; la costruzione di altri indici, permetterà di dare risposta ai problemi del tipo da noi indicato e che si possono presentare in quistioni concrete — dalla meteorologia alla biologia.

Comunque, attraverso questa breve Nota e tutte quelle precedenti, risulta che:

I. Statisticamente occorre seguire la formazione di individui di secondo ordine in seno ad una collettività di individui del primo ordine.

II. Lo studio di queste formazioni è connesso a quello di certe speciali matrici.

III. Si riconducono a tale tipo di problemi tutti quelli aventi come base la evoluzione di una collettività rispetto ad un dato carattere oppure quello dello studio di una serie statistica di configurazioni che sorgono per evoluzione l'una dall'altra.

IV. Lo schema di ricerca vale ogni qualvolta è in difetto la legge di causalità in senso stretto (matematico cioè e non probabilistico).

Cristalli di hauerite con simmetria pentagonododecaedrica tetraedrica.

Nota del prof. **Antonio Scherillo**, *presentata dal socio* **G. D'Erasmo**

(Adunanza del dì 7 giugno 1941 - XIX)

Sunto. — Vengono descritti alcuni cristalli di hauerite con simmetria pentagonododecaedrica tetraedrica, conservati nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Napoli. Si tratta di geminati secondo $\{100\}$ di individui enantiomorfi, costituiti rispettivamente da $\{100\}$, $\{111\}$, $\{321\}$, e da $\{100\}$, $\{\bar{1}\bar{1}1\}$, $\{321\}$.

L'esistenza dell'hauerite — MnS_2 — in Sicilia, a Raddusa e precisamente in contrada Destricella, è stata segnalata da E. Scacchi e, quasi contemporaneamente, da O. Silvestri. [1]) Su questo minerale Scacchi ha pubblicato ancora due note, nell'ultima delle quali annunziava di aver trovato cristalli con simmetria pentagonododecaedrica tetraedrica, ripromettendosi di pubblicare, in un prossimo lavoro, le relative misure angolari ed i disegni. [2]) Tale lavoro però non è mai stato pubblicato, e neppure esistono nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Napoli appunti o schizzi in proposito. Avendo il prof. Onorato richiamata la mia attenzione su questa affermazione di E. Scacchi, ho esaminato i campioni di hauerite del museo mineralogico di Napoli per cercare se fra questi vi fossero degli esemplari colla simmetria della classe dell'ullmannite.

È noto che nei trattati l'hauerite è considerata isomorfa con la pirite. Secondo Scacchi invece l'isomorfismo sarebbe tra l'hauerite e l'ullmannite — *Ni Sb S* — e a questo proposito nota che mentre nell'ullmannite si ha una sfaldatura facile e perfetta secondo $\{100\}$, come nell'hauerite, ciò non si riscontra nella pirite. Bisogna però osservare che, salvo Scacchi, nessuno di coloro che hanno studiato dal punto di vista cristallografico l'hauerite, [3]) ha mai osservato indizi della simmetria pentagonododecae-

[1]) Scacchi E. *Sulla hauerite delle solfare di Raddusa in Sicilia*. Rend. R. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, 1890. — Silvestri O. *Sulla hauerite di Sicilia*. Riv. di Min. e Crist. Padova, 1890.

[2]) Scacchi E. *Ancora della Hauerite di Raddusa in Sicilia*. Rend. R. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, 1890. — *Ulteriori osservazioni sui cristalli di Hauerite di Sicilia*. Ibid., 1899.

[3]) Goldschmidt V. Schroeder R. *Uber Hauerit*. Zeit. Kryst. vol. 45, 1908. Onorato E. *Sulla hauerite di Raddusa*. Mem. R. Acc. Naz. Lincei, Serie 6ª, vol. 1, 1926.

drica tetraedrica e che i fotogrammi ottenuti con i raggi X [1]) possono benissimo esser interpetrati ammettendo per l'hauerite la stessa struttura della pirite. Per tali ragioni ritrovare e descrivere i campioni osservati da E. Scacchi avrebbe ancora presentato un certo interesse.

L'esame dei campioni di hauerite del Museo di Napoli non mi ha dato però alcun risultato. La maggior parte dei cristalli ha un abito ottaedrico o cubo ottaedrico, in altri esistono anche facce di pentagono dodecaedro {210} e forme {321}, ma la simmetria risultante è quella della classe della pirite.

In un grosso campione ho trovato un abito cristallino nuovo, che è bene descrivere brevemente. Il cristallo ha abito prevalentemente cubico, ma ben sviluppate sono pure le facce di un pentagono dodecaedro con simbolo {320}. Questo simbolo è provato dalle misure seguenti ottenute col goniometro di applicazione, perchè le dimensioni del cristallo, che ha un lato di cm. 2 $^1/_2$, e lo stato delle facce non permettono assolutamente l'uso del goniometro a riflessione.

angolo	misurato	calcolato
(203) $\wedge$ (001)	33° 30′	33° 41′ $^1/_2$
(203) $\wedge$ (320)	61° 30′	62° 30′

La forma {320} è, a quanto mi risulta, nuova per la specie.

Nel campione esistono pure facce di ottaedro, ma hanno sviluppo limitatissimo. È interessante notare che le facce {320}, non sono piane, ma al contrario sono dovute a ripetizione alternante di solchi rientranti e di dossi sporgenti, cioè sono da interpetrarsi come costituite da ripetizione oscillatoria di due facce {*hkl*}. Per conseguenza lo spigolo tra {100} e {320} invece di esser rettilineo, ha un tipico andamento a zig-zag. Vedremo in seguito che importanza sia da attribuire a tutto ciò; per intanto dobbiamo limitarci a notare che anche questo campione, almeno apparentemente, presenta la solita simmetria diacisdodecaedica.

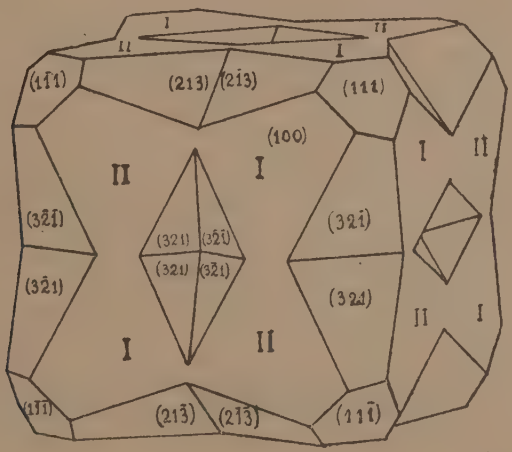
Nel riordinare però l'Istituto di mineralogia di Napoli ho trovato in un armadio, insieme con altro materiale da studio, dei campioni di hauerite che presentano ben altro interesse cristallografico. Non ho trovato alcuna indicazione sulla località di provenienza di questi campioni, ma quasi certamente sono stati trovati anche questi a Raddusa, unica località, oltre Kalinka in Ungheria, in cui sia stata trovata l'hauerite.

Descrivo di questi campioni più minutamente il maggiore, che misura cm. 3 $^1/_2$ di lato, perchè è il meglio formato. L'abito cristallino, naturalmente un pò schematizzato, è rappresentato nella figura. Già un semplice esame di questa mostra che si tratta di un geminato incrociato di due individui e che i piani di geminazione e di contatto sono paralleli alle

[1]) Onorato E. *Simmetria e struttura dell'hauerite.* Periodico Miner. 1930. — A questo proposito bisogna però avvertire che i metodi roentgenografici non sono atti a provare l'assenza o la presenza del centro di simmetria in un cristallo.

facce del cubo. Ciò esclude la simmetria della classe della pirite con cui, per la presenza dei $3P$, questa geminazione è incompatibile. D'altra parte l'esame della figura mostra che non esistono neppure i $6P'$, onde l'unica simmetria possibile, dato che si deve escludere quella della classe della cuprite, perchè gli assi cristallografici sono A_2, è quella della classe dell'ullmannite cioè pentagonododecaedrica tetraedrica come appunto aveva affermato E. Scacchi, circa mezzo secolo fa.

Anche in questo caso mi son dovuto limitare all'uso del goniometro di applicazione. Naturalmente le misure non sono troppo precise, ma bastano allo scopo che mi ero prefisso: trovare il simbolo delle facce e confermare la legge di geminazione. Ogni individuo del geminato è dunque risultato essere la combinazione del cubo, del tetraedro e di un pentagonododecaedro tetraedrico. Nell'individuo indicato nel disegno con (1) il



tetraedro è destro, mentre il pentagonododecaedro tetraedrico è positivo sinistro ed ha simbolo $\{32\bar{1}\}$. L'individuo (II) è enantiomorfo col primo: è quindi costituito, oltre che dal cubo, dal tetraedro sinistro, e da un pentagono dedecaedrico positivo destro $\{321\}$. Trattandosi di un geminato tra due individui enantiomorfi della classe dell'ullmannite, la simmetria che ne risulta è quella della classe della pirite; quindi nè gli A_2 divengono A_3, nè gli spigoli [110] divengono A_2. [1]).

---

[1]) Può essere interessante notare che anche nell'ullmannite di Löllingo sono stati osservati geminati secondo questa legge; sebbene con abito cristallino diverso (Hintze C. *Handbuch der Mineralogie*. Lipsia, 1904, vol. 1, parte 1, pag. 793).

Nei singoli individui ho misurato tra le facce gli angoli seguenti:

angolo	misurato	calcolato
(100) ∧ (001)	90°	90°
(100) ∧ (111)	54° 30′	54° 44′
(100) ∧ (2$\bar{1}$3)	57° 30′	57° 42′
(100) ∧ (213)		
(100) ∧ (32$\bar{1}$)	36°	36° 42′
(100) ∧ (3$\bar{2}\bar{1}$)		
(100) ∧ ($\bar{1}$32)	104° 30′	105° 30
(100) ∧ ($\bar{1}\bar{3}$2)		
(111) ∧ (1$\bar{1}\bar{1}$)	110°	109° 28′
(111) ∧ (2$\bar{1}$3)	52°	51° 53
($\bar{1}\bar{1}$1) ∧ (213)		
(2$\bar{1}$3) ∧ (32$\bar{1}$)	86°	85° 54
(213) ∧ (3$\bar{2}\bar{1}$)		

Tra le facce dei due geminati ho poi misurato gli angoli:

angolo	misurato	calcolato
(111) ∧ (11$\bar{1}$)	70°	70° 32′
(32$\bar{1}$) ∧ (3$\bar{2}\bar{1}$)	63°	64° 36′
(2$\bar{1}\bar{3}$) ∧ (2$\bar{1}\bar{3}$)	110°	106° 38
(111) ∧ (3$\bar{2}\bar{1}$)	89°	89° 59
($\bar{1}\bar{1}$1) ∧ (32$\bar{1}$)		

Poichè col goniometro d'applicazione non è possibile misurare angoli rientranti ho dovuto rinunciare a misurare gli angoli tra (2$\bar{1}$3) e (213).

I valori riportati sono la mèdia di diverse misure; la differenza tra i valori estremi può anche arrivare per lo stesso angolo ad alcuni gradi (fino a 4° o 5°). Lo stato delle facce e il metodo di misurazione non permettono una precisione maggiore. Si può notare che, mentre l'accordo tra angoli misurati e calcolati è in genere abbastanza soddisfacente finchè si tratta di angoli tra le facce di uno stesso individuo, diviene molto meno buono quando si tratta di facce apparenti a due individui diversi. Ciò in parte è dovuto alla difficoltà di misurare col goniometro di applicazione angoli tra facce non adiacenti, ma sopratutto al fatto che i singoli individui non ubbidiscono esattamente alla legge di geminazione e quindi

la loro posizione reciproca è un po' diversa da quella che dovrebbe essere in teoria,

Si vede dal disegno che ogni faccia di cubo presenta al centro una rientranza a contorno poligonale limitata da facce piane. Tali figure sono disposte secondo la simmetria della classe della pirite. Ho potuto misurare qualche angolo fra queste facce rientranti e le facce vicine. Tali misure sono state particolarmente difficili e non sono da considerarsi troppo sicure; tuttavia mi sembrano sufficienti per assegnare a queste facce rientranti i simboli indicati nel disegno. Si tratta dunque di pentagonododecaedri tetraedrici: quello a contatto dell'individuo (I), in cui compare la forma positiva sinistra, è positivo destro, mentre l'altro a contatto coll'individuo (II) è positivo sinistro. Le misure eseguite sono le seguenti:

angolo	misurato	calcolato
$(3\bar{2}\bar{1}) \wedge (100)$	37°	36°42′
$(3\bar{2}\bar{1}) \wedge (111)$	90°	89°59′
$(3\bar{2}\bar{1}) \wedge (32\bar{1})$	66°	64°36′

Le facce del cubo non sono perfettamente piane perchè le parti che appartengono agli individui che compongono il geminato, non sono, come ho detto sopra, rigorosamente parallele. Le facce dei pentagonododecaedri tetraedrici si distinguono perchè spesso la loro superficie è scabra. Abbastanza spesso si nota che le facce dei pentagonododecaedri tetraedrici contigui hanno tendenza a formarne una di pentagonododecaedro con simbolo $\{320\}$, costituita da tante piccole facce alternate di forme destre e sinistre. Questo dimostra che l'hauerito ha tendenza a formare geminati polisintetici. Su queste apparenti facce di pentagonododecaedro ho misurato gli angoli seguenti che ne confermano il simbolo:

angolo	misurato	calcolato
$(320) \wedge (100)$	34°30′	33°41′
$(320) \wedge (111)$	37°30′	36°48′

Le facce del tetraedro sono le meno imperfette. Non si nota nessuna differenza di aspetto tra le forme $\{111\}$ e $\{1\bar{1}1\}$, e le forme $\{321\}$ e $\{3\bar{2}1\}$.

La stessa geminazione l'ho notata anche in un campione più piccolo del precedente, (ha in media un lato di cm. 2,5) che è più imperfetto per sviluppo sproporzionato delle forme di uno degli ottanti. I singoli individui sono composti delle medesime forme del campione precedente. Anche qui le facce del cubo presentano figure incavate, ma le facce che limitano questo sono in qualche caso facce di tetraedro. In questo caso infatti lo

spigolo fra tali facce e (100) è sensibilmente parallelo allo spigolo fra (100) e (111). In un caso ho anche potuto misurare l'angolo della faccia in questione con (100) e (111), trovando rispettivamente 53° e 110°, mentre i valori teorici sono 54°44′ e 109°28′. Altre figure rientranti sembrano invece del tipo descritto precedentemente.

Il terzo campione è un piccolo frammento di un geminato secondo la medesima legge. Attualmente il lato è cm. 1,5, ma non si tratta che di una parte di un campione, molto ridotto di dimensioni, forse dallo stesso Scacchi, per studiarne la sfaldatura. Questo non offre nulla di specialmente notevole, le facce del cubo non mostrano incavature.

Se i cristalli di hauerite si presentassero costantemente coll'abito cristallino che ho descritto dovrebbero senz'altro essere ascritti alla classe pentagonododecaedrica tetraedrica ed anzi di questa simmetria presenterebbero fra i minerali un esempio assai più evidente che i cristalli di ullmannite. Invece questo abito cristallino è affatto eccezionale. Così p. es. Onorato, che pure ha esaminato un centinaio di cristalli di hauerite appartenenti al museo mineralogico della R. Università di Roma, non vi ha mai trovato indizi di simmetria inferiore a quella della pirite. Quanto ai cristalli del museo di Napoli (una trentina), le cose stanno invece un po' diversamente, perchè agli esemplari a simmetria tetartoedrica va ora anche aggiunto quel cristallo, combinazione di $\{100\}$ e di $\{320\}$, di cui ho parlato al principio di questo lavoro. Qui le facce $\{320\}$ erano il risultato della ripetizione oscillatoria di due facce $\{hkl\}$ di cui è stato impossibile determinare il simbolo, ma che, nel caso più semplice, sarebbero (321) e $(32\bar{1})$. La stessa cosa abbiamo visto avvenire, in alcuni casi, negli esemplari con tetartoedria evidente. Penso quindi che anche questo cristallo rappresenti un geminato del tipo di quelli descritti, colla differenza che qui le lamelle di geminazione sono sottili e numerose, mentre nei campioni che ho descritto gli individui componenti del geminato — salvo qualche lamella interposta — erano sostanzialmente due.

Già Onorato [1]) aveva notato nell'hauerite la tendenza a formare aggruppamenti cristallini. Se è vero che l'hauerite cristallizza nella classe dell'ullmannite bisognerà ammettere che questa specie minerale formi quasi sempre dei geminati. Infatti i cristalli con abito diacisdodecaedrico dovrebbero esser interpetrati come un geminato, secondo $\{100\}$ di due pentagonidodecaedri tetraedrici enantiomorfi. Sarebbe la stessa geminazione che ho descritto più sopra, colla sola differenza, che gli individui (I) e (II) sarebbero scambiati di posto. Anche l'ottaedro, così comune nell'hauerite, sarebbe o una combinazione del tetraedro destro col sinistro, o una gemi-

---

[1]) Onorato E. *Sulla hauerite di Raddusa.*

nazione secondo la solita legge. Cristalli tetraedrici di hauerite non pare che ne siano stati trovati mai.

In conclusione dunque nei geminati che Scacchi ha segnalato e che io descrivo, la simmetria tetartoedrica è evidente, ma d'altra parte è pure evidente la simmetria emiedrica della massima parte dei cristalli, in accordo, si aggiunga, con le figure di corrosione. [1]) Perciò mi sembra che non si possa senz'altro concludere che l'hauerite appartenga alla classe pentagonododecaedrica tetraedrica. Se l'hauerite è veramente isomorfa colla pirite, i cristalli che ho descritto in questa nota potrebbero esser la combinazione del cubo, dell'ottaedro e del diacisdodecaedro, ma le facce di quest'ultima forma, per qualche causa che ci sfugge, si sarebbero sviluppate solo in una metà degli ottanti. Naturalmente non si tratterebbe di geminati, ma di accrescimenti paralleli. Nei cristalli a contatto gli ottanti colle facce di diacisdodecaedro sarebbero disposte simmetricamente rispetto ai *P*. La spiegazione è certo assai artificiosa e nessuno dei cristallografi classici l'accetterebbe; io mi ci sono soffermato perchè credo che ormai in fatto di simmetria l'ultima parola debba esser lasciata agli studi strutturali. Se per l'hauerite si riuscirà a trovare una struttura soddisfacente corrispondente alla simmetria pentagonododecaedrica tetraedrica, questo vorrà dire che i cristalli di hauerite che ho qui illustrato hanno veramente un notevole interesse cristallografico. Il merito della segnalazione andrebbe naturalmente a Eugenio Scacchi.

Elementi matematici di base per una teoria delle collettività secondo la genetica

Nota del socio corrispondente **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 9 novembre 1940-XIX)

Questa nota verrà inserita in un prossimo fascicolo.

---

[1]) Onorato E. *Simmetria e struttura dell'hauerite.*

Le variazioni della Latitudine negli anni 1935 e 1940 dedotte dalle osservazioni delle Stazioni Internazionali.

Nota del socio **Luigi Carnera**

(Adunanza del dì 7 giugno 1941 - XIX)

Sunto. — Vengono dedotte con i soliti metodi e basandosi sulle osservazioni fatte nelle Stazioni Internazionali le traiettorie del Polo di rotazione terrestre negli anni 1935 e 1940. Per il primo dei due anni la deduzione è al solito duplice, tenendo conto una volta solo delle Stazioni boreali, ed una basandosi tanto sulle boreali che sulle australi. Per il 1940 non è stato possibile fare lo stesso essendo venute a mancare totalmente le osservazioni di una delle stazioni australi ed in fine d'anno anche quelle della seconda.

Una delle maggiori difficoltà che presenta la deduzione del movimento del Polo di rotazione terrestre dalle osservazioni sistematiche di latitudine, proviene dalla necessità di assumere per la latitudine media un valore, che corrisponda nel modo migliore alle declinazioni adottate per le stelle osservate. E questa difficoltà viene particolarmente in luce quando in seguito a variazione di programma di osservazioni si devono raccordare due gruppi successivi di osservazioni: da ciò l'opportunità di limitarsi in simili casi a sole deduzioni provvisorie fin tanto, che non sia fatto un particolare studio di raccordo. Quando al principio del 1935 il Prof. Kimura si vide costretto per ragioni di salute a rinunciare al compito di dirigere l'Ufficio Centrale per il servizio internazionale delle Latitudini, e tale incarico venne affidato, dal gennaio del 1936, a chi scrive, era stato variato proprio allora il programma di osservazioni dalle Stazioni boreali. Venne calcolata la Polodia provvisoria pel 1935 dal Prof. Kimura, ma non parve opportuno che i risultati definitivi di quell'anno fossero staccati dai seguenti con i quali costituiscono un tutto omogeneo, e pertanto con nota deliberazione del Congresso dell'Unione Astronomica Internazionale dell'agosto 1938 restò affidato all'Ufficio di Napoli il compito di elaborare anche le osservazioni del 1935. Il Prof. Kimura con l'abituale sua cortesia ci fece pervenire in seguito a quella decisione tutti i libretti di osservazione ed i calcoli provvisori da lui eseguiti: per questa novella prova di cameratismo rinnovo qui a lui i più vivi ringraziamenti.

Dovendo però rielaborare tutto il complesso delle osservazioni fatte nel sessennio, ritenni opportuno avere tutti i dati calcolati e ridotti nella stessa guisa, onde assicurare al lavoro un corso rapido, ed evitare sviste od

errori. Pur non essendo quindi strettamente necessario, si ricalcolarono tutte le osservazioni del 1935, adottando in questi calcoli le costanti strumentali e gli stessi criterii e metodi di calcolo tenuti negli anni successivi: da ciò il fatto che in questa nota appaiono con i risultati delle osservazioni del 1940 anche quelli del 1935, sostanzialmente coincidenti con quelli ricavati a suo tempo dal Kimura (salvo beninteso gli effetti prodotti dalle piccole correzioni dovute a termini periodici, e dei quali si decise a Stoccolma, nel 1938, di prescindere nei primi calcoli, data l'ancor soverchia loro incertezza). Difficoltà presentò il calcolo della Polodia corrispondente all'anno 1940, e ciò in gran parte per colpa del personale, cui era affidata la stazione di Carloforte. Fin dal principio del 1940 ha cessato di dar segni di vita la Stazione di Adelaide: ignoriamo se colà è stato sospeso il lavoro, o se, come vogliamo, sperare si è solamente sospeso lo invio dei libretti in conseguenza della poca sicurezza che godono i trasporti marittimi per effetto della guerra. Dalla primavera del 1940 è pur venuto a mancare il regolare invio dei libretti dalla Stazione di Batavia: ma è da sperare, che anche presso quella stazione, che tanto si distingueva per le ottime e numerose sue osservazioni, non sieno state interrotte e che a guerra finita ci sia dato di poter ricevere i libretti di osservazione e si abbia veder colmata la lacuna che oggi purtroppo lamentiamo. Per le Stazioni americane, ostacolate dalle attuali condizioni di guerra, grazie all'appoggio delle Ambasciate degli Stati Uniti d'America e dell'Argentina, che gentilmente vollero farci pervenire i libretti con le osservazioni, potemmo seppur con qualche ritardo ricevere tutti i dati necessari. A questi Enti, che così facilitarono il nostro lavoro, vadano i nostri più sentiti ringraziamenti.

E devo ancor inviare una parola di speciale gratitudine al Prof. Kimura, che con somma cortesia volle rendermi avvertito di un lieve errore commesso inavvertentemente nel calcolo delle osservazioni di Mizusawa nei mesi di giugno e luglio 1939. Un momentaneo cambio di calcolatore, dovuto a malattia, ha fatto sì che fosse applicata una correzione col segno errato. Tale fatto era passato inosservato essendosi attribuita la risultante discontinuità al fatto che nella stessa epoca erano venute a mancare le osservazioni di Carloforte. Corretto l'errore si è ottenuto un andamento più regolare nella traiettoria del Polo, e da ciò le coordinate leggermente diverse per il Polo, che si trovano più innanzi. Ma ciò che come dissi dobbiamo maggiormente deplorare è la pessima prova data dal personale della Stazione di Carloforte. Alle difficoltà reali dovute a condizioni meteorologiche, talvolta sfavorevoli, ed a quelle dovute allo stato di guerra, si è aggiunta la mancanza di volontà e di senso del dovere da parte dei due astronomi colà destinati. Dopo quaranta anni di attività della Stazione, che ebbe per moltissimi anni il vanto di essere la più attiva, e quella che forniva i risultati più attendibili, dobbiamo oggi deplo-

rare mesi continui di assoluta inattività, e tenendo conto di quanto è avvenuto poi nel primo semestre del corrente anno 1941, si ha una lacuna di osservazioni della durata di ben dieci mesi! Quali debbano essere le conseguenze è facile intuirlo.

Gli osservatori nelle Stazioni sono stati:

1935 - Mizusawa: M. Jamasaki ed S. Kavasaki.
Kitab L. Schtschergezky e G. Senjutowich.
Carloforte T. Nicolini; A. Gennaro in gennaio e febbraio, poi E. Martin da marzo in poi.
Gaithersburg E. L. Williams.
Ukiah H. G. Wrocklage.
Adelaide A. L. Dawson ed A. E. Morkey.
La Plata V. Manganiello.
1940 - Mizusawa: come sopra.
Kitab L. Schtschirgezky e W. Obraszow.
Carloforte N. Mattana, ed A. Colacevich (nei mesi di gennaio-aprile).
Gaithersburg, Ukiah e La Plata come sopra.

Tutte le osservazioni sono state calcolate tenendo a base le costanti strumentali usate nei precedenti anni: appare ormai evidente però la necessità di adottare valori più precisi per il passo del micrometro particolarmente per le stazioni di Kitab, Gaithersburg e Carloforte: il materiale di osservazioni raccolto a tale fine è sufficiente ad assicurare valori attendibili, ed è a buon punto una discussione definitiva, che ci porterà ai valori da adottare per il prossimo periodo di tempo a partire dal 1941. Per le declinazioni delle stelle furono adottati i valori usati negli anni precedenti, già usati dal Prof. Kimura. Dobbiamo però notare a questo proposito, che in seguito alla avvenuta pubblicazione del G. C. di L. Boss è stata riscontrata una leggera differenza nella declinazione di due stelle, una della Coppia 51, e l'altra della Coppia 65, osservate nelle Stazioni boreali. A partire dal 1940 sono stati adottati i valori nuovi più corretti per il calcolo delle Effemeridi, ma onde rendere i risultati fra loro paragonabili, nei calcoli delle latitudini per il 1940 si è conservato il vecchio valore delle declinazioni.

Il numero delle coppie di latitudine osservate nei due anni dalle singole stazioni è stato il seguente:

	Osservaz. serali			Osservaz. mattino			Totale		
	1935	1940	Media	1935	1940	Media	1935	1940	Media
Mizusawa	716	800	705	641	710	623	1357	1510	1328
Kitab	640	867	724	601	810	687	1241	1677	1411
Carloforte	925	350	967	774	247	797	1699	597	1764
Gaithersburg	720	645	680	578	608	577	1298	1253	1257
Ukiah	772	617	712	739	588	685	1511	1205	1397
	3773	3279	3788	3333	2963	3369	7106	6242	7157
Adelaide	723	—	709	681	—	639	1404	—	1348
La Plata	1160	—	928	942	—	745	2102	—	1673
	1883	—	1637	1623	—	1384	3506	—	3021
Somma	5656	3279	5425	4956	2963	4753	10612	6242	10178

Il numero medio di coppie riportato nel quadro superiore si riferisce in generale al sessennio 1935-40: per Carloforte, essendo gli anni 1939 e 1940 mancanti di osservazioni per mesi completi, la media è del quadriennio 1935-38; analogamente per Adelaide, e per La Plata, della quale ci mancano al presente ancora i libretti dei due ultimi mesi, la media si riferisce al quinquennio 1935-39.

I risultati delle osservazioni eseguite nelle singole stazioni sono contenuti nei quadri seguenti (I, II, III) ove accanto alle latitudini concluse per ciascun mese è indicato il numero delle coppie osservate. Nel calcolo delle latitudini onde eliminare al solito l'effetto, che potrebbe avere sul valore medio un sensibile errore di declinazione di una coppia osservata un numero di volte sensibilmente diverso in confronto delle altre, si ebbe cura di ridurre i valori delle medie mensili di ciascuna coppia al valore medio del gruppo servendosi degli scarti trovati durante il sessennio fra il valore medio del gruppo e quello delle singole coppie. I valori di queste correzioni con il numero delle coppie da cui sono state dedotte sono i seguenti.

COPPIE DELLE STAZIONI BOREALI

Gruppo I			Gruppo II			Gruppo III			Gruppo IV		
1	—0.114	679	7	—0.211	585	13	—0.020	475	19	—0.021	418
2	+ .053	644	8	+ .242	588	14	+ .158	448	20	— .223	410
3	+ .079	637	9	— .174	572	15	+ .089	435	21	+ .355	387
4	— .141	640	10	— .503	546	16	— .065	431	22	+ .510	413
5	+ .151	601	11	+ .615	534	17	+ .264	395	23	— .091	362
6	— .015	585	12	+ .055	526	18	— .463	380	24	— .067	375

Gruppo V			Gruppo VI			Gruppo VII			Gruppo VIII		
25	—0.159	423	31	+0.327	484	37	+0.064	558	43	+0.087	659
26	— .190	402	32	— .199	491	38	— .009	583	44	+ .128	645
27	+ .273	408	33	— .262	477	39	+ .142	562	45	— .020	669
28	+ .288	380	34	— .003	481	40	— .950	574	46	+ .120	621
29	— .105	370	35	+ .153	454	41	— .025	544	47	— .241	584
30	— .090	375	3e	— .008	426	42	— .126	637	48	— .101	600

Gruppo IX			Gruppo X			Gruppo XI			Gruppo XII		
49	+0.090	647	55	—0.257	702	61	—0.030	779	67	—0.084	716
50	— .141	652	56	+ .064	731	62	— .160	760	68	— .002	728
51	+ .242	635	57	+ .060	704	63	— .040	727	69	+ .194	698
52	— .126	663	58	— .052	696	64	— .264	721	70	— .171	681
53	— .007	632	59	+ .038	686	65	+ .063	713	71	— .089	686
54	— .047	615	60	+ .149	673	66	+ .441	725	72	+ .156	659

COPPIE DELLE STAZIONI AUSTRALI

Gruppo I			Gruppo II			Gruppo III			Gruppo IV		
1	−0.005	210	7	+0.106	219	13	−0.047	201	19	−0.205	232
2	− .003	226	8	+ .032	218	14	+ .081	202	20	+ .092	236
3	+ .173	225	9	+ .022	223	15	− .072	212	21	+ .131	226
4	− .335	204	10	− .088	220	16	− .117	282	22	+ .007	227
5	− .160	203	11	− .012	204	17	+ .107	206	23	− .066	220
6	+ .311	204	12	− .150	206	18	+ .037	202	24	+ .050	212

Gruppo V			Gruppo VI			Gruppo VII			Gruppo VIII		
25	+0.123	273	31	+0.055	255	37	−0.051	242	43	+0.058	215
26	− .028	269	32	+ .123	269	38	+ .058	246	44	+ .165	209
27	+ .164	258	33	+ .266	269	30	+ .209	237	45	− .090	202
28	− .262	250	34	− .022	255	40	− .182	235	46	+ .074	203
29	− .074	250	35	− .186	255	41	− .166	222	47	− .270	183
30	+ .063	253	36	− .280	234	42	+ .116	229	48	+ .032	180

Gruppo IX			Gruppo X			Gruppo XI			Gruppo XII		
49	−0.500	186	55	+0.303	190	61	−0.116	167	67	−0.494	203
50	− .083	169	56	− .016	181	62	+ .123	169	68	+ .258	200
51	+ .182	184	57	− .057	166	63	+ .042	177	69	− .094	197
52	+ .044	174	58	− .420	171	64	+ .057	179	70	+ .229	193
53	+ .258	168	59	− .013	175	65	− .081	173	71	− .012	185
54	+ .140	160	60	+ .188	153	66	− 0.29	174	72	+ .152	206

Quadro I.

STAZIONI BOREALI

Osservazioni della sera

Data 1935	Gruppo	Mizusawa		Kitab		Carloforte		Gaithersburg		Ukiah	
.06	IV	3.657	42	1.897	5	8.915	42	13.494	54	12.236	56
.14	V	.345	59	.709	47	.890	40	.159	61	.034	26
.23	VI	.547	63	.812	31	.977	80	.340	61	.272	59
.30	VII	.373	79	.782	50	.912	90	.231	50	.138	70
.39	VIII	.292	78	.673	74	.834	75	.199	94	12.083	67
.47	IX	.163	42	.487	70	.645	133	.044	68	11.957	55
.56	X	.284	53	.759	52	.808	156	.159	64	12.019	94
.64	XI	.499	59	.839	89	.940	149	.355	36	.232	96
.72	XII	.503	42	.831	63	.945	74	.474	68	.240	78
.80	I	.567	87	.788	62	.941	31	.513	69	.232	72
.89	II	.489	73	.653	48	.850	29	.224	53	.120	60
.97	III	.734	39	.896	49	9.032	26	.596	42	.338	39

Osservazioni del mattino

.06	V	3.380	43	1.646	5	8.821	31	13.246	34	12.081	48
.14	VI	.645	48	.934	45	9.018	42	.257	44	.306	21
.23	VII	.451	78	.803	28	8.928	76	.285	46	.171	55
.30	VIII	.390	77	.721	48	.858	69	.150	53	12.122	70
.39	IX	.244	69	.572	60	.677	53	.167	82	11.998	59
.47	X	.275	82	.669	63	.827	126	.206	71	12.094	54
.56	XI	.434	28	.917	59	.964	124	.373	40	.229	96
.64	XII	.539	40	.812	96	.951	136	.539	23	.235	96
.72	I	.511	34	.765	59	.976	66	.576	60	.278	77
.81	II	.423	69	.733	54	8.794	19	.215	53	.057	71
.90	III	.616	76	.826	44	9.028	13	.526	42	.365	56
.97	IV	.634	47	.929	40	8.945	19	.526	30	.267	36

QUADRO II.

STAZIONI AUSTRALI

Osservazioni della sera						Osservazioni del mattino					
Data 1935	Gruppo	Adelaide		La Plata		Data 1935	Gruppo	Adelaide		La Plata	
.06	IV	36.647	84	31.722	122	.06	V	36.743	82	31.804	111
.14	V	.785	92	.816	114	.14	VI	36.661	95	31.773	94
.23	VI	36.726	63	31.717	132	.23	VII	37.052	70	32.104	117
.30	VII	37.053	32	32.069	111	.30	VIII	36 859	23	31.887	98
.39	VIII	36,895	56	31.925	86	.39	IX	.860	47	.847	62
.47	IX	.914	28	.863	95	.48	X	.843	18	.754	68
.56	X	.894	40	.785	99	.56	XI	.731	38	.709	85
.64	XI	.710	85	.633	78	.64	XII	.886	76	.878	45
.73	XII	.868	44	.920	81	.73	I	.713	42	.800	64
.81	I	.664	75	.745	76	.81	II	.420	72	.626	60
.89	II	.461	69	.558	88	.89	III	.713	61	.909	70
.97	III	.699	55	.831	78	.97	IV	.653	57	.745	68

QUADRO III.

STAZIONI BOREALI

Osservazioni della sera.

Data 1940	Gruppo	Mizusawa		Kitab		Carloforte		Gaithersburg		Ukiah	
.06	IV	3.630	76	1.788	29	9.018	31	13.336	45	12.113	35
.14	V	.564	52	.710	47	8.708	71	.067	31	.075	34
.22	VI	.619	52	.834	79	.870	59	.297	55	.274	42
.31	VII	.488	77	.744	68	.718	46	.319	57	.275	48
,39	VIII	.344	99	.639	99	.608	35	.274	51	.180	54
.47	IX	.161	85	.409	94	.655	36	.231	50	.060	72
.56	X	.145	41	.760	74	8.825	38	.276	61	.135	70
.64	XI	.540	45	.864	100	9.057	34	.471	49	.201	59
.73	XII	.411	85	.779	92	—	—	.479	90	.187	66
.80	I	.453	98	.747	86	—	—	.418	65	12.183	45
.89	II	.463	38	.740	52	—	—	.179	42	11.963	62
.97	III	.625	52	.812	47	—	—	.488	49	12.243	30

Osservazioni del mattino

.06	V	3.459	73	1.700	19	8.757	19	13.071	41	12.013	30
.14	VI	.688	47	.902	32	.898	42	.311	28	.261	32
.22	VII	.584	50	.800	71	.787	43	.291	58	.252	42
.31	VIII	.470	56	.689	73	.677	42	.285	55	.256	48
.39	IX	.264	82	.407	88	.619	20	.072	51	.127	54
.47	X	.268	72	.611	93	.846	22	.349	44	.199	70
.56	XI	.349	21	.736	74	8.953	39	.450	60	.293	66
.64	XII	.591	34	.755	97	9 095	20	.557	44	.234	60
.73	I	.394	80	.626	82	—	—	.510	81	12.187	66
.80	II	.260	92	.700	86	—	—	.185	64	11.967	39
.89	III	.534	40	.799	48	—	—	.550	41	12.219	51
.97	IV	.541	63	.847	47	—	—	.480	41	.149	30

Con i soliti procedimenti, e continuando ad assumere quali latitudini medie delle stazioni i valori adottati negli anni precedenti si sono ricavate indipendentemente dalle osservazioni dei gruppi serali e da quelle dei gruppi del mattino le coordinate istantanee del Polo di rotazione X ed Y ed il termine residuo Z, costituito essenzialmente dalla correzione $\Delta\delta$ da apportare alle declinazioni medie di ciascun gruppo.

La deduzione delle coordinate del Polo e del termine Z venne eseguita per l'anno 1935 in doppio modo, tenendo conto una volta delle sole stazioni boreali ed una contemporaneamente delle australi e boreali. Per il 1940 invece mancando del tutto le osservazioni di Adelaide, e di La Plata essendo pervenute fino al momento attuale solo quelle dei primi dieci mesi, ci si è limitati alla deduzione basata unicamente sulle stazioni boreali. Nei quadri numerici IV, V e VI sono raccolti i risultati ottenuti nella forma abituale chiara sufficientemente da non richiedere delucidazioni.

STAZIONI BOREALI

DATA 1935	Gruppi	X			Y			Z_b		
		sera	matt.	media	sera	matt.	media	sera	matt.	media
.06	IV-V	−0.064	−0.007	−0.036	+0.029	+0.059	+0.044	−0.122	+0.089	−0.122
.14	V-VI	+ .049	— .055	— .003	+ .006	— .043	— .019	+ .098	— .116	+ .094
.23	VI-VII	— .027	+ .011	— .008	+ .041	+ .026	+ .034	— .068	— .005	— .092
.30	VII-VIII	+ .037	— .008	+ .015	+ .026	+ .010	+ .018	+ .038	+ .074	+ .016
.39	VIII-IX	+ .035	— .009	+ .013	+ .058	+ .073	+ .066	+ .110	+ .194	+ .092
.47	IX-X	— .003	+ .036	+ .017	+ .069	+ .069	+ .069	+ .267	+ .113	+ .230
.56	X-XI	+ .049	+ .045	+ .047	+ .004	+ .038	+ .021	+ .119	— .059	+ .116
.64	XI-XII	— .007	— .001	— .004	+ .041	+ .101	+ .071	— .051	— .091	— .055
.72	XII-I	+ .005	+ .010	+ .008	+ .084	+ .147	+ .116	— .075	— .095	— .083
.80	I-II	— .023	— .025	— .024	+ .092	+ .004	+ .048	— .085	+ .079	— .090
.89	II-III	— .053	— .034	— .044	+ .030	+ .104	+ .067	+ .054	— .150	+ .066
.97	III-IV	— .059	— .041	— .050	+ .068	+ .043	+ .056	— .200	— .141	— .175
								(— .141)		— .141

STAZIONI BOREALI ed AUSTRALI

											Z_a		
											sera	matt.	media
.06	IV-V	−0.063	−0.025	−0.044	+0.030	+0.043	+0.037	−0.120	+0.087	−0.120	−0.106	−0.020	−0.106
.14	V-VI	+ .037	— .044	— .004	— .004	— .033	— .019	+ .097	— .113	+ .092	— .004	— .081	— .012
.23	VI-VII	— .023	— .001	— .012	+ .045	+ .015	+ .030	— .068	— .005	— .091	— .072	+ .280	— .077
.30	VII-VIII	+ .026	— .007	+ .010	+ .016	+ .011	+ .014	+ .037	+ .074	+ .016	+ .260	+ .075	+ .270
.39	VIII-IX	+ .012	— .018	— .003	+ .039	+ 066	+ .053	+ .108	+ ,191	+ .091	+ .112	+ .062	+ .094
.47	IX-X	— .005	+ .032	+ .014	+ .068	+ .066	+ .067	+ .264	+ .111	+ .228	+ .095	+ .001	+ .079
.56	X-XI	+ .063	+ .035	+ .049	+ .016	+ .030	+ .024	+ .120	— .059	+ .116	+ .034	— .081	+ .018
.64	XI-XII	— .004	— .020	— .012	+ .043	+ .085	+ .064	— .050	— .092	— .055	— .099	+ .092	— .090
.72	XII-I	— .022	— .042	— .032	+ .062	+ .103	+ .083	— .076	— .099	— .084	+ .102	— .029	+ .097
.80	I-II	— .050	— .050	— .050	+ .069	— .017	+ .026	— .087	+ .075	— .093	— .083	— .273	— .056
.89	II-III	— .060	— .083	— .071	+ .026	+ .062	+ .044	+ .052	— .153	+ .064	— .282	+ .026	— .278
.97	III-IV	— .081	— .053	— .067	+ .050	+ .034	+ .042	— .200	— .140	— .177	— .021	— .092	+ .003
								(— .143)		— .141	(— .139)		— .115

Quadro VI

STAZIONI BOREALI

DATA 1940	Gruppi	X			Y			Z		
		sera	mattino	media	sera	mattino	media	sera	mattino	media
									(— 0.066)	
.06	IV-V	— 0.007	— 0.067	— 0.037	— 0.016	— 0.054	— 0 035	— 0.056	+ 0.118	— 0.061
.14	V-VI	— .150	— .113	— .132	— .070	— .036	— 0.053	+ .088	— .098	+ .103
.22	VI-VII	— .109	— .131	— .120	+ .003	+ .017	+ .010	— .063	— .028	— .081
.31	VII-VIII	— .129	— .146	— .138	+ .076	+ .082	+ .079	+ .008	+ .012	— .010
.39	VIII IX	— .109	— .107	— .108	+ .109	+ .120	+ .114	+ .111	+ .225	+ .077
.47	IX-X	— .011	+ .031	+ .010	+ .183	+ .164	+ .174	+ .226	+ .075	+ .225
.56	X-XI	+ .101	+ .048	+ .074	+ .109	+ .161	+ .135	+ .102	— .028	+ .089
.64	XI-XII	+ .053	+ .039	+ .046	+ .051	+ .109	+ .080	— .101	— .119	— .064
.73	XII-I	+ .158	+ .096	+ .127	+ .109	+ .174	+ .142	— .073	— .024	— .096
.80	I-II	+ .089	+ .161	+ .125	+ .088	+ .021	+ .055	— .049	+ .106	— .037
.89	II-III	+ .055	+ .111	+ .083	— .048	+ .102	+ .027	+ .062	— .127	+ .084
.97	III-IV	+ .026	+ .128	+ .077	+ .061	+ .044	+ .053	— .131	— .113	— .129

L'accordo, che presentano i valori delle coordinate del Polo dedotte indipendentemente dai due gruppi di osservazioni serali e mattutine, si può ritenere in generale abbastanza buono, ed al solito appare migliore nella deduzione fatta tenendo conto tanto delle stazioni boreali, che delle australi. Il minor accordo, che presentano i valori trovati nel 1940 trovano giustificazione più che sufficiente nella mancanza di osservazioni da parte della Stazione di Carloforte: i quattro ultimi mesi dell'anno sono la prova più evidente di quale importanza sia il lavoro della stazione nostra ai fini della ricerca generale.

I termini *Z*, che troviamo riportati, sono come si è detto essenzialmente dipendenti dalle correzioni, che dovrebbero esser apportate alle declinazioni delle stelle dei diversi gruppi, e da ciò appunto l'accordo che presentano quei valori nei due mesi successivi in cui le stesse stelle appaiono osservate prima nel gruppo del mattino e poi in quello della sera. La differenza, che presentano i due valori va imputata non solo agli errori di osservazione, ma anche al fatto che riferendosi i due valori ad epoche distinte e ad ore diverse di osservazione devono influire su di essi anche gli effetti delle variazioni a corto periodo della posizione del Polo. A questo proposito è di sommo interesse riunire nei quadri VII ed VIII i valori ottenuti negli anni decorsi, ove per omogeneità in corrispondenza agli anni 1936 e 1937 si è ritenuto introdurre, non i valori conchiusi per tali differenze negli studi delle polodie di quegli anni, notoriamente dedotti dopo aver tentato di depurare le singole latitudini osservate dall'influenza dei termini periodici locali, che più tardi si convenne abbandonare, ma bensì quelli ricavati dal primo calcolo. Il primo dei due quadri si riferisce alla deduzione basata unicamente sul complesso delle cinque stazioni boreali, il secondo (VIII) invece alla analoga deduzione comprendente il complesso di tutte le stazioni boreali ed australi. Le medie di queste correzioni delle declinazioni di ciascun gruppo concordano in generale bene fra di loro (particolarmente per le boreali basate sulle osservazioni di cinque stazioni) tanto da poter ammettere con sufficiente sicurezza che un errore di $\pm$ 0″.01 non dovrebbe esser oltrepassato per i gruppi delle stazioni boreali. Maggiore, ma non di molto, dovrebbe essere l'incertezza della correzione da apportarsi alle declinazioni delle coppie australi. Di notevole interesse si mostra la differenza, che presentano questi valori delle correzioni medie di gruppo, a seconda che risultano dalle osservazioni fatte alla sera piuttosto che al mattino. Risultando già eliminata la parte essenziale dovuta al vero e proprio movimento del Polo, in quelle differenze dovremmo poter vedere oltre agli effetti degli errori residui di osservazione ancora delle variazioni sistematiche verificatesi nel corso dei due mesi fra l'época cioè in cui il gruppo fu osservato come mattutino, ed il mese successivo in cui fu osservato come gruppo serale. Le correzioni $\Delta\delta$, che troviamo nei quadri IX e X (dedotte nella prima dal complesso delle stazioni bo-

Quadro VII

Gruppo	1935	1936	1937	1938	1939	1940	Media
IV	(—0.122)	—0.141	—0.107	—0.063	—0.044	—0.061 (.113)	—0.089
V	+ .094	+ .077	+ .075	+ .072	+ .105	+ .103	+ .088
VI	— .092	— .090	— .058	— .084	— .080	— .080	— .081
VII	+ .016	— .026	+ .014	+ .005	— .026	— .010	— .001
VIII	+ .092	+ .078	+ .103	+ .074	+ .055	+ .076	+ .080
IX	+ .230	+ .209	+ .241	+ .227	+ .218	+ .225	+ .224
X	+ .116	+ .122	+ .142	+ .120	+ .094	+ .088	+ .114
XI	— .055	— .042	— .009	— .052	— .020	— .064	— .040
XII	— .083	— .074	— .051	— .090	— .057	— .096	— .076
I	— .090	— .121	— .084	— .078	— .095	— .036	— .084
II	+ .066	+ .080	+ .106	+ .094	+ .105	+ .084	+ .089
III	— .175	— .168	— .152	— .102	— .128	— .129	— .143

Quadro VIII

COPPIE STAZIONI BOREALI

Gruppo	1935	1936	1937	1938	1939	1939	Media
IV	(—0.120)	—0.141	—0.109	—0.063	—0.045	(—0.072)	—0.091
V	+ .092	+ .074	+ .072	+ .070	+ .105		+ .083
VI	— .090	— .092	+ .062	— .087	— .083		— .083
VII	+ .016	— .025	+ .011	000	+ .008		+ .002
VIII	+ .091	+ .075	+ .099	+ .070	+ .060		+ .075
IX	+ .227	+ .206	+ .236	+ .222	+ .225		+ .223
X	+ .115	+ .119	+ .136	+ .114	+ .094		+ .116
XI	— .054	— .043	— .012	— .057	— .026		— .038
XII	— .084	— .073	— .050	— .096	— .063		— .073
I	— .093	— .122	— .089	— .081	— .101		— .097
II	+ .063	+ .080	+ .104	+ .095	+ .103		+ .089
III	— .176	— .170	— .153	— .119	— .134		— .151

COPPIE STAZIONI AUSTRALI

Gruppo	1935	1936	1937	1938	1939	1939	Media
IV	(—0.106)	—0.115	—0.063	—0.112	—0.059	(—0.054)	—0.092
V	— .012	— .004	+ .015	— .004	+ .027		+ .004
VI	— .076	— .008	— .002	+ .003	— .018		— .020
VII	+ .270	+ .372	+ .394	+ .374	+ .376		+ .358
VIII	+ .093	+ .162	+ .176	+ .156	+ .170		+ .160
IX	+ .078	+ .128	+ .163	+ .088	+ .122		+ .116
X	+ .017	— .011	— .021	— .047	— .015		— .015
XI	— .090	— .110	— .154	— .185	— .200		— .148
XII	+ .097	+ .081	+ .063	+ .036	+ .061		+ .068
I	— .056	— .066	— .141	— .126	— .130		— .104
II	— .277	— .284	— .344	— .326	— .312		— .309
III	+ .002	+ .231	+ .032	+ .037	+ .001		+ .021

I due valori posti in parentesi e relativi al gruppo IV, basati su osservazioni di un solo mese (gennaio 1935, e decembre 1940 e rispettivamente 1939 per il quadro VIII) hanno avuto un peso $^1/_2$ nella formazione della media. Per i gruppi

reali unicamente, e nella seconda da tutte) mettono in luce una notevole sistematicità, tanto da poter dire che quella differenza può essere concepita come costituita da una quantità costante (rispettivamente + 0″.011, ovvero+ 0″.012) e da una variabile sinusoidalmente nel corso dell'anno e di un'ampiezza di circa 0″.06 a 0″.07, ciò che ci porterebbe a pensare a variazioni che potrebbero pur essere di carattere diurno e più o meno accentuate durante il corso dell'anno. Ma allo stato attuale della discussione sembra prematuro insistere su un tal fatto. La sensibile maggior incertezza dei risultati ottenuti per le correzioni di gruppo delle stazioni australi non consente identificare per esse analogo fenomeno.

QUADRO IX

DIFFERENZE DEI $\Delta\delta$ TRATTI DAI GRUPPI SERALI IN CONFRONTO DEI VALORI RICAVATI DAI GRUPPI DEL MATTINO.

Stazioni boreali

Gruppo	1935	1936	1937	$\Delta\delta_b$ 1938	1939	1940	Media	
IV	- .- -	0.000	—0.051	—0.068	—0.020	+0.010	—0.026	—0.027
V	+ .008	+ .003	+ .080	+ .018	+ .018	— .030	+ .016	+ .005
VI	+ .048	+ .042	+ .064	+ .046	+ .052	+ .035	+ .057	+ .046
VII	+ .033	+ .058	+ .046	+ .053	+ 052	+ .036	+ .046	+ .035
VIII	+ .036	+ .057	+ .049	+ .061	+ .062	+ .069	+ .067	+ .056
IX	+ .073	+ .021	+ .039	+ .016	— .025	+ .005	+ .023	+ .012
X	+ .006	+ .037	+ .007	— .044	+ .010	+ .027	+ .009	— .002
XI	+ .008	— .066	— .003	+ .012	— .001	— .073	— .025	— .036
XII	+ .016	+ .001	— .020	— .007	— .007	+ .050	+ .007	— .004
I	+ .010	+ .006	— .027	— .028	— .003	— .025	— .013	— .024
II	— .025	— .016	— .007	— .001	+ .031	— .044	— .012	— .023
III	— ,050	+ .011	— .050	+ .002	+ .015	— .004	— .015	— .026

IX ed XI va ancora tenuto presente che la correzione dedotta si riferisce alle declinazioni delle coppie 51 e 64 quali ci furono comunicate originariamente dal Prof. KIMURA. Da confronto posteriore con il G. C. di Boss è risultata una piccola differenza di cui si tenne conto nelle Effemeridi a partire dal 1940: nei calcoli delle latitudini per il 1940 onde non introdurre alterazioni si continuò a far uso dei valori adottati precedentemente.

QUADRO X

DIFFERENZE DEI $\Delta\delta$ TRATTI DAI GRUPPI SERALI IN CONFRONTO DEI VALORI RICAVATI DAI GRUPPI DEL MATTINO.

Stazioni boreali ed australi

Gruppo	1935	1936	1937	1938	1939	Media	
			$\Delta\delta_b$				
IV	- . - -	—0.003	—0 054	—0.060	—0.028	— 0.036	—0.048
V	+0.010	+ .006	+ .079	+ .016	+ .015	+ .025	+ .013
VI	+ .045	+ .043	+ .062	+ .045	+ .048	+ .049	+ .037
VII	+ .042	+ .056	+ .046	+ .052	+ .067	+ .053	+ .041
VIII	— .034	+ .061	+ .048	+ .064	+ .057	+ .053	+ .041
IX	+ .073	+ .022	+ .041	+ .020	— .032	+ .025	+ .013
X	+ .009	+ .037	+ .007	— .046	— .001	+ .001	— .011
XI	+ .009	+ .062	.000	— .011	.000	— .013	— .025
XII	+ .016	+ .005	— .017	— .003	— .006	— .001	— .013
I	+ .012	+ .006	— .019	— .026	— .003	— .006	— .018
II	— .023	— .012	— .010	— .002	+ .028	— .004	— .016
III	— .047	+ .007	— .045	+ .032	+ .020	— .007	— .019
			$\Delta\delta_a$				
IV	- . - - -	—0,047	—0.027	—0.007	—0.037	—0.030	
V	+0.016	+ .060	— .016	— .009	+ .016	+ .013	
VI	+ .009	— .016	— .004	+ .065	+ .010	+ .013	
VII	— .020	+ .057	— .007	— .097	+ .053	— .003	
VIII	+ .037	+ .028	— .034	— .017	— .010	+ .001	
IX	+ .033	+ .047	— .014	+ .038	— .022	+ .016	
X	+ .033	— .024	— .002	— .109	— .016	— .024	
XI	— .018	— .052	+ .072	+ .007	+ .042	+ .010	
XII	+ .010	+ .038	— .006	+ .033	+ .025	+ .019	
I	— .054	+ .043	+ .035	— .023	+ .009	+ .002	
II	— .009	— .055	— .051	— .025	+ .060	— .016	
III	— .047	— .011	— .029	+ .032	— .020	— .015	

Se si liberano ora i termini Z trovati dalla parte dipendente dalle correzioni alle declinazioni, e che con molta attendibilità possiamo ammettere data dai valori contenuti nelle ultime colonne dei quadri VII ed VIII, otteniamo i veri e propri termini «z», che comprendono in se oltre a tutti gli effetti degli errori d'osservazione, ancora tanto i fenomeni di carattere locale, che quelli di carattere generale e che si possono immaginare causati da ulteriori movimenti reali o fittizii. Le permanenze dei segni, che presentano le differenze dei valori ottenuti per la stessa epoca, ma dalle osservazioni dei gruppi serali in confronto a quelli ricavati dai gruppi del mattino, indica nel modo più evidente, che cause sistematiche devono esser considerate come permanenti, senza che al momento sia possibile chiarire la loro natura. I quadri numerici XI e XII, i primi relativi al 1935 ed i secondi al 1940, contengono i valori delle «z» e non richiedono delucidazioni essendo evidente il significato delle diverse colonne.

Quadro XI

Data 1935	Gruppi	Sera	Mattin.	S.-M.	Media
.06	IV-V	—0.033	+0.001	—0.034	—0.016
.14	V-VI	+ .010	— .034	+ .044	— .012
.23	VI-VII	+ .013	.000	+ .013	+ .006
.30	VII-VIII	+ .042	— .006	+ .048	+ .018
.39	VIII-IX	+ .030	— .030	+ .046	+ .007
.47	IX-X	+ .043	— .001	+ .058	+ .028
.56	X-XI	+ .005	— .019	+ .024	— .007
.64	XI-XII	— .011	— .019	+ .004	— .014
.72	XII-I	+ .001	— .011	+ .012	— .010
.80	I-II	— .001	— .010	— .009	— .011
.89	II-III	— .035	— .007	— .028	— .021
.97	III-IV	— .057	— .052	— .005	— .053

1935		Sera	Matt.	S.-M.	Media	Sera	Matt.	S.-M.	Media
.06	IV-V	—0.029	—0.004	—0.033	—0.012	—0.012	—0.024	+0.012	—0.018
.14	V-VI	+ .014	— .030	+ .044	— .008	— .008	— .061	+ .053	— .034
.23	VI-VII	+ .015	— .007	+ .022	+ .004	— .052	— .078	+ .026	— .065
.30	VII-VIII	+ .035	— .001	+ .036	+ .017	— .098	— .085	— .013	— .091
.39	VIII-IX	+ .033	— .032	+ .065	+ .001	— .048	— .054	+ .006	— .051
.47	IX-X	+ .041	— .006	+ .047	+ .017	— .021	+ .016	— .037	— .002
.56	X-XI	+ 004	— .021	+ .025	— .008	+ .049	+ .067	— .018	+ .058
.64	XI-XII	— .012	+ .019	— .031	+ .003	+ .049	+ .023	+ .026	+ .036
.73	XII-I	— .003	— .001	— 002	— .002	+ .034	+ .074	— .040	+ .054
.80	I-II	+ .010	— .014	+ .024	— 602	+ .020	+ .036	— .016	+ .028
.89	II-III	— .037	— .002	— .035	— .019	+ .027	+ .038	— .009	+ .032
.97	III-IV	— .049	— .049	.000	— .049	— .042	— .001	— .041	— .021

Quadro XII

1940		Sera	Matt.	S.M.	Media
.06	IV-V	+0.034	+0.032	+0.002	+0.033
.14	V-VI	+ .002	— .017	+ .019	— .007
.22	VI-VII	+ .019	— .024	+ .043	— .002
.31	VII-VIII	+ .013	— .039	+ .052	— .013
.39	VIII-IX	+ .030	— .001	+ .031	+ .014
.47	IX-X	.000	— .040	+ .040	— .020
.56	X-XI	— .012	+ .013	— .025	.000
.64	XI-XII	— .061	— .043	— .018	— .052
.73	XII-I	+ .003	+ .061	— .058	+ .032
.80	I-II	+ .035	+ .017	+ .018	+ .026
.89	II-III	— .027	+ .016	— .043	— .005
.97	III-IV	+ .012	— .024	+ .036	— .006

Al solito modo, partendo dalle coordinate calcolate X ed Y dei quadri IV, V, e VI, si è proceduto poi alla deduzione delle coordinate definitive mediante un conguaglio grafico, cercando scostarsi il meno possibile dai valori osservati; si è giunti così alle coordinate istantanee del Polo che seguono.

A rettifica dei valori comunicati nel precedente rapporto, ed in conseguenza dell'errore incorso ed al quale si è fatto cenno più avanti si ag-

giungono ai valori del 1935 e 1940, anche quelli del 1939, tenendo al solito distinti i risultati ottenuti nei due modi diversi.

Coordinate istantanee del Polo di rotazione.

(Valori dalle Stazioni boreali)

Data 1935	X	Y	1939	X	Y	1940	X	Y
.06	—0″.024	+0″.013	.06	—0″.130	—0,019	.06	—0,024	—0.039
.14	— .016	+ .006	.14	— .116	+ .014	.14	— .104	— .042
.23	+ .002	+ .016	.22	— .089	+ .081	.22	— 135	+ .005
.30	+ .009	+ .032	.31	— .045	+ .131	.31	— .126	+ .070
.39	+ .016	+ .054	.39	— .003	+ .154	.39	— .084	+ 127
.47	+ .023	+ .059	.47	+ .045	+ .162	.47	— .005	+ .154
.56	+ .036	+ .042	.55	+ .099	+ .152	.56	+ .048	+ .139
.64	+ .017	+ .066	.64	+ .150	+ .129	.64	+ .077	+ .121
.72	— .007	+ .093	.72	+ .177	+ .095	.73	+ .110	+ .103
.80	— .028	+ .069	.80	+ .165	+ .065	.80	+ .114	+ .075
.88	— .047	+ .056	.88	+ .129	+ .023	.89	+ .093	+ .010
.97	— .071	+ .066	.97	+ .072	— .010	.97	+ .080	+ .029

(Valori dalle Stazioni boreali ed australi)

Data 1935	X	Y	1939	X	Y
.06	—0.045	+0.009	.06	— 0.153	—0.022
.14	— .036	+ .004	.14	— .148	— .005
.23	— .015	+ 014	.22	— .126	+ .046
.30	— .001	+ .030	.31	— .081	+ .105
.39	+ .007	+ .048	.39	— .030	+ .122
.47	+ .020	+ .056	.47	+ .023	+ .146
.56	+ .034	+ .038	.55	+ .082	+ .140
.64	— .002	+ .054	.64	+ .137	+ .114
.72	— .035	+ .068	.72	+ .148	+ .069
.80	— .055	+ .041	.80	+ .134	+ .020
.89	— .066	+ .035	.88	+ .081	— .022
.97	— .087	+ .052	.97	+ .006	— .067

Partendo dalla latitudine media ammessa per le singole stazioni si sono calcolate poscia le latitudini per le epoche delle osservazioni dei diversi gruppi e le differenze ci hanno dato nuovi valori delle «Z», e riunendo poscia in media i valori relativi allo stesso gruppo si sono avute le correzioni $\Delta\delta$, che troviamo nei quadri XIII e XIV, quali risultano ora dalle osservazioni delle singole stazioni ed ove nella seconda colonna per ciascuna stazione si trova lo scarto dal valore medio. Risulta chiara ed

evidente una differenza sistematica fra i risultati delle diverse stazioni, che può trovare una spiegazione plausibile nel valore erroneo attribuito alle latitutudini medie delle stazioni. Tenendo conto, che nei rapporti del 1936 e 37 si parlava di «errori» e posteriormente di «correzioni» e che pertanto ai primi valori conviene mutar segno per renderli paragonabili ai secondi, troviamo le seguenti differenze sistematiche nei sei anni:

	1935	1936	1937	1938	1939	1940	Media
Mizusawa	−0″.026	−0″.014	−0″.016	−0″.034	+0″.006	−0″.005	−0″.015
Kitab	+ .058	+ .030	+ .029	+ .016	+ .005	+ .029	+ .028
Carloforte	− .057	− .030	− .004	+ .005	− .005	− .059	− .025
Gaithersb.	+ .043	+ .016	+ .004	+ .028	+ .014	+ .032	+ .023
Ukiah	− .015	− .002	− .003	− .017	− .020	+ .018	− .012

Questi valori forniscono una sicura riduzione delle latitudini medie delle diverse stazioni. Prima di accogliere tuttavia tali valori, converrà ancor vedere se una eventuale correzione del valore ammesso per il micrometro non possa spiegare parzialmente o totalmente queste differenze. Per quanto riguarda i valori trovati delle $\Delta\delta$, vediamo che essi coincidono sostanzialmente con quelli trovati direttamente dalla discussione complessiva di tutte le stazioni: le piccole differenze si devono al fatto, che le ultime deduzioni vennero fatte partendo dai valori della curva graficamente conguagliata, e che particolarmente quando mancano le osservazioni di Carloforte non si ha un compenso esatto per i termini dipendenti dalle longitudini, talchè possono farsi sentire le differenze fra le coordinate del Polo calcolate e quelle conguagliate.

In modo analogo sono state ricavate pure i valori delle «z» dalle singole stazioni, che risultano sensibilmente diversi fra di loro: ma data la complessità della cosa, e la notevole influenza che su tali valori possono esercitare i non esatti valori del passo del micrometro, non sembra il caso insistere qui su tal punto con ulteriori ricerche, anche perchè già è iniziato il lavoro di rielaborazione di tutte le osservazioni del sessennio, che meglio permetterà tale studio.

1935

Gruppo	Mizusawa		Kitab		Carloforte		Gaithersburg		Ukiah		Media	
IV	−0.126	−0.004	−0.208	+0.078	−0.018	−0.112	−0.244	+0.114	−0.052	−0.078	−0.130	
V	+ .154	− .063	+ .066	+ .025	+ .088	+ .003	+ .041	+ .050	+ .103	− .012	+ .091	
VI	− .091	+ .002	− .126	+ .037	− .041	− .048	− .052	− .037	− .135	+ .046	− .089	
VII	+ .076	− .060	− .052	+ .068	+ .047	− .031	+ .005	+ .011	+ .004	+ .012	+ .016	
VIII	+ .130	− .038	+ .029	+ .063	+ .125	− .033	+ .109	− .017	+ .068	+ .024	+ .092	
IX	+ .253	− .024	+ .186	+ .043	+ .315	− .086	+ .193	+ .036	+ .200	+ .029	+ .229	
X	+ .173	− .058	+ .011	+ .104	+ .170	− .055	+ .112	+ .003	+ .110	+ .005	+ .115	
XI	− .014	− .039	− .158	+ .105	+ .032	− .085	− 068	+ .015	− .059	+ .006	− .053	
XII	− .068	− .015	− .133	+ .090	+ .011	− .094	− .190	+ .107	− .033	− .050	− .083	
I	− .069	− .023	− .098	+ .006	− .023	− .069	− .232	+ .140	− .037	− .055	− .092	
II	+ 042	+ .024	− .005	+ .071	+ .097	− .031	+ .072	− .006	+ .126	− 060	+ .066	
III	− .160	− .015	− .180	+ .005	− .133	− .042	− .277	+ .102	− .127	− .048	− .175	
Media		− .026		+ .058		− .057		+ .043		− .015		

Gruppo											Adelaide		La Plata		Media
IV	−0.121	+0.001	−0.163	+0.043	+0.004	− 0.124	−0.257	+0.137	−0.062	−0.058	−0.120	−0.105	−0.004	−0.114	+0.005	0.109
V	+ .172	− .083	+ .061	+ .028	+ .068	+ .021	+ .033	+ .056	+ .112	− .023	+ .089	+ .010	+ .018	− .026	− .018	− .008
VI	− .070	− .020	− .132	+ .042	− .060	− .030	− .062	− .028	− .127	+ .037	− .090	− .074	+ .004	− .081	− .003	− .078
VII	+ .088	− .073	− .056	+ .071	+ .034	− .019	.000	+ .015	+ .010	+ .005	+ .015	+ .261	− .009	+ .281	+ .008	+ .273
VIII	+ .140	− .047	+ .029	+ .064	+ .122	− .029	+ .103	− .010	+ .070	+ .023	+ .093	+ .069	− .026	+ .121	+ .026	+ .095
IX	+ .261	− .032	+ .188	+ .041	+ .310	− .081	+ .187	+ .042	+ .200	+ .029	+ .229	+ .063	− .012	+ .087	+ .012	+ .075
X	+ .177	− .062	+ .013	+ .102	+ .168	− .053	+ .108	+ .007	+ .109	+ .006	+ .115	+ .038	+ .017	+ .004	− .017	+ .021
XI	− .001	− .053	− .155	+ .101	+ .023	− .077	− .077	+ .023	− .060	+ .006	− .054	− .102	− .012	− .077	+ .013	− .090
XII	− .038	− .047	− .126	+ .041	− .011	− .074	− .213	+ .128	− .036	− .049	− .085	+ .070	− .026	+ .121	+ .025	+ .096
I	− .032	− .062	− .085	− .009	− .046	− .048	− .264	+ .170	− .044	− .050	− .094	− .094	− .034	− .025	+ .035	− .060
II	+ .074	+ .009	+ .013	+ .052	+ .078	− .013	+ .042	+ .023	+ .117	− .052	+ .065	− .320	− .046	− .228	+ .046	− .274
III	− .136	− .040	− .166	− .010	− .147	− .029	− .298	+ .122	− .132	− .044	− .176	− .046	− .047	+ .047	+ .046	+ .001
Media		− .043		+ .047		− .045		+ .057		− .014		− .014		+ .014	

QUADRO XIV

1940

Gruppo	Mizusawa		Kitab		Carloforte		Gaithersburg		Ukiah		Media
IV	−0.084	+0.023	−0.021	−0.040	−0.072	+0.011	−0.119	+0.058	−0.011	−0.050	−0.061
V	+ .071	+ .035	+ .068	+ .038	+ .175	− .069	+ .116	− .010	+ .098	− .008	+ .106
VI	− .042	− .039	− .138	+ .057	− .035	− .046	− .111	+ .030	− .077	− .004	− .081
VII	+ .049	− .059	− .098	+ .088	+ .078	− .088	− .060	+ .050	− .020	+ .010	− .010
VIII	+ .120	− .043	− .036	+ .113	+ .205	− .128	+ .031	+ .046	+ .063	+ .014	+ .077
IX	+ .241	− .018	+ .205	+ .018	+ .264	− .041	+ .214	+ .009	+ 190	+ .033	+ .223
X	+ .192	− .106	− .052	+ .138	+ .130	− .044	+ .074	+ .012	+ .085	+ .001	+ .086
XI	− .068	+ .005	− .135	+ .072	+ .003	− .066	− .082	+ .019	− .032	− .031	− .063
XII	− .138	+ .040	− .074	− .024	.--	.--	− .151	+ .053	− .027	− .071	− .098
I	− .060	+ .017	+ .036	− .079	.--	.--	− .115	+ .072	− .031	− .002	− .043
II	+ .029	+ .061	+ .028	+ .062	.--	.--	+ .135	− .045	+ .168	− .078	+ .090
III	− .161	+ .025	− .044	− .092	.--	.--	− .228	+ .092	− .109	− .027	− .135
Media		− .005		+ .029		− .059		+ .032		− .018	

Con i valori delle coordinate X ed Y ottenute dal conguaglio grafico sono stati tratti i valori corrispondenti di decimo in decimo di anno e calcolate poscia le correzioni delle latitudini corrispondenti alle diverse longitudini. Delle coordinate X ed Y del Polo, diamo qui di seguito i valori per gli anni 1935, 1939 e 1940, avvertendo che i valori di principio e fine di anno sono dedotti tenendo conto dell'andamento della traiettoria immediatamente precedente o seguente. I due grafici fanno vedere poi quello che è stato realmente il moto del Polo.

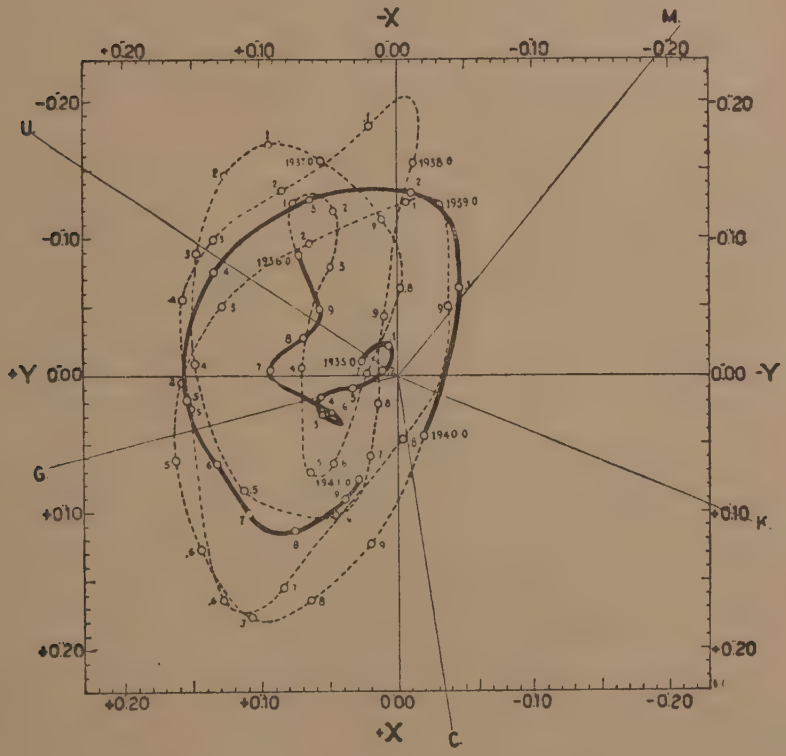


Fig. 1.

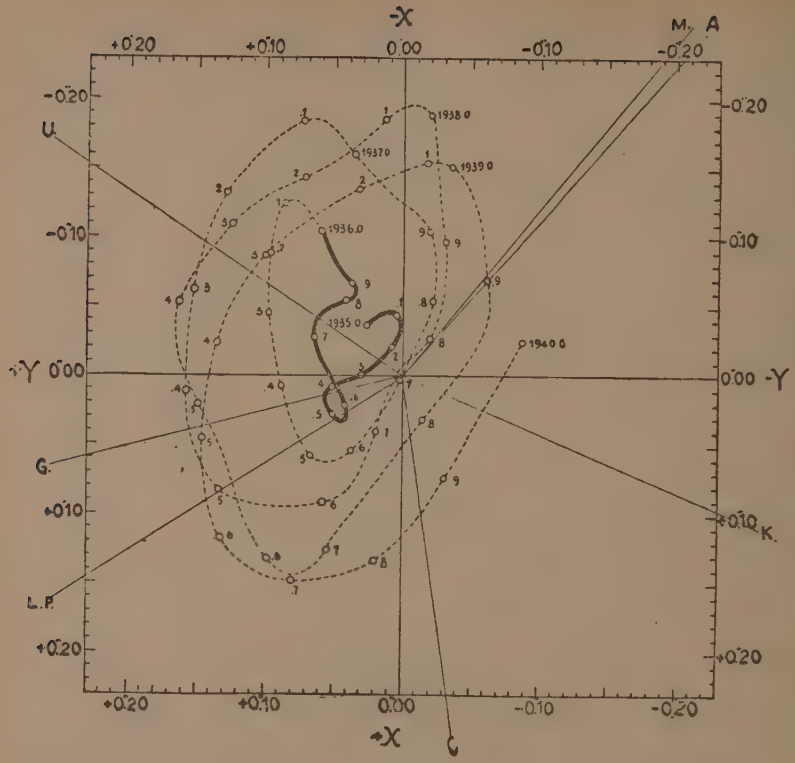


Fig. 2.

COORDINATE ISTANTANEE DEL POLO DI ROTAZIONE.

(Dal complesso delle stazioni boreali).

Frazione d'anno	1935		1939		1940	
	x	y	x	y	x	y
.0	—0.012	+0.025	- 0.125	—0.031	+0.044	—0.020
.1	— .023	+ .007	— .126	— .006	— .064	— .046
.2	— .004	+ .010	— .097	+ .063	— .134	— .012
.3	+ .009	+ .032	— .051	+ .127	— .129	+ .063
.4	+ .017	+ .056	+ .004	+ .156	— .076	+ .132
.5	+ .028	+ .053	+ .062	+ .162	+ .018	+ .153
.6	+ .030	+ .049	+ .127	+ .143	+ .064	+ .131
.7	— .003	+ .092	+ .176	+ .107	+ .100	+ .108
.8	— .028	+ .068	+ .165	+ .065	+ .114	+ .075
.9	— .049	+ .057	+ .123	+ .019	+ .091	+ .038
.0	— .088	+ .071	+ .044	— .033	(+ .076)	(+ .026)

COORDINATE ISTANTANEE DEL POLO DI ROTAZIONE.

Dal complesso dele stazioni boreali ed australi.

Frazione d'anno	1935 x	1935 y	1939 x	1939 y
.0	—0.036	+0.026	—0.150	—0.034
.1	— .043	+ .005	— .152	— .017
.2	— .021	+ .008	— .134	+ .032
.3	— .001	+ .030	— .086	+ .100
.4	+ .008	+ .050	— .023	+ .135
.5	+ .028	+ .050	+ .045	+ .146
.6	+ .021	+ .042	+ .118	+ .132
.7	— .028	+ .064	+ .148	+ .080
.8	— .054	+ .041	+ .133	+ .020
.9	— .067	+ .037	+ .074	— .030
.0	— .105	+ .060	— .025	— .087

Nella tabella XV, alla pagina seguente, si trovano i valori delle riduzioni delle latitudini istantanee osservate alle diverse longitudini alla posizione del Polo medio valevoli per l'anno 1940: per il 1939 le differenze sono minime in confronto ai valori comunicati in precedenza, e per il 1935 ebbe già a suo tempo a comunicare valori sostanzialmente identici il Prof. KIMURA.

Ai lavori di calcolo ha preso parte lo stesso personale degli anni scorsi, ossia le Signorine: A. CHIARAZZO, A. DE MARIA, V. ESPOSITO, E. PISANO, G. PIZZA ed A. SALZANO, sotto la guida e sorveglianza continua e diligente del Prof. Ing. PAOLO VOCCA, che ebbe cura di provvedere ai controlli minuziosi di tutto l'operato, al disegno delle curve ed alla deduzione dei valori conguagliati. A tutti quanti hanno collaborato sia osservando che poi calcolando invio qui il mio più sentito ringraziamento.

Capodimonte, Giugno 1941-XIX.

QUADRO XV

DATA	-12^h	-10^h	-8^h	-6^h	-4^h	-2^h	0^h	$+2^h$	$+4^h$	$+6^h$	$+8^h$	$+10^h$	$+12^h$
1940.0	−0″.04	−0″.02	+0″.00	+0″.02	+0″.04	+0″.04	+0″.04	+0″.02	−0″.00	−0″.02	−0″.04	−0″.04	−0″.04
.1	+ .06	+ .08	+ .07	+ .05	+ .01	− .02	− .06	− .08	− .07	− .05	− .01	+ .02	+ .06
.2	+ .13	+ .12	+ .08	+ .01	− .06	− .10	− .13	− .12	− .08	− .01	+ .06	+ .10	+ .13
.3	+ .13	+ .08	+ .02	− .06	− .12	− .14	− .13	− .08	− .02	+ .06	+ .12	+ .14	+ .13
.4	+ .08	.00	− .07	− .13	− .15	− .14	− .08	.00	+ .07	+ .13	+ .15	+ .14	+ .08
.5	− .02	− .10	− .14	− .15	− .12	− .06	+ .02	+ .10	+ .14	+ .15	+ .12	+ .06	− .02
.6	− .06	− .12	− .14	− .13	− .08	− .02	+ .06	+ .12	+ .14	+ .13	+ .08	+ .02	− .06
.7	− .10	− .15	− .15	− .11	− .05	+ .03	+ .10	+ .15	+ .15	+ .11	+ .05	− .03	− .10
.8	− .11	− .14	− .13	− .08	− .01	+ .06	+ .11	+ .14	+ .13	+ .08	+ .01	− .06	− .11
.9	− .09	− .10	− .08	− .04	+ .02	+ .06	+ .09	+ .10	+ .08	+ .04	− .02	− .06	− .09
1941.0	− .08	− .09	− .07	− .03	+ .01	+ .05	+ .08	+ .09	+ .07	+ .03	− .01	− .05	− .08

Sull' equazione di Stiefel ed altre analoghe

Nota del socio corrispondente **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 3 maggio 1941 - XIX)

Questa nota verrà inserita in un prossimo fascicolo.

Avanzi di vertebrati quaternari di Melpignano (Lecce).

Memoria del dott. **Giuseppe Mirigliano**, *presentata dal socio* **G. D'Erasmo**

(nell'adunanza del dì 7 giugno 1941 - XIX per essere inserita nel vol. II, serie 3 , degli Atti)

Sunto. — L'A. descrive la fauna di una gora ossifera quaternaria scoperta nei pressi di Melpignano (Lecce) durante i lavori di estrazione praticati nella pietra leccese. Questa fauna, formata da: *Testudo graeca* L., *Anser anser* L., *Ciconia D'Erasmoi* n. sp., *Oryctolagus cuniculus* L., *Lepus* sp. (cfr. *L. europaeus* Pallas), *Canis lupus* L., *Canis* sp., *Vulpes vulpes* L., *Mustela putorius* L., *Elephas* sp. (cfr. *E. antiquus* Falc.), *Rhinoceros Merckì* Jaeg. et Kaup, *Equus caballus* L., *Hippopotamus amphibius* L., *Sus scropha* L., *Cervus elaphus* L., var., *Ovis* sp. (cfr *O. aries* L.), *Bos primigenius* Boj., in uno coi caratteri forniti dal giacimento, inducono l'A. a ritenere che il riempimento della gora predetta si sia potuto effettuare in quel periodo di tempo che va dall'interglaciale riss-würmiano alla prima fase della glaciazione di Würm.

Sulla analisi dei fenomeni di regime variabile nei sistemi lineari a costanti concentrate.

Memoria del dott. ing. **Lucio Vallese**, *presentata dal socio corr.* **G. Andreoli**

(nell'adunanza del dì 3 maggio 1941 - XIX per essere inserita nel vol. II, serie 3., degli Atti)

Sunto. — Viene esposto un metodo simbolico generale valevole per la trattazione dei fenomeni di regime variabile e di quelli di regime stazionario nei sistemi fisici lineari a costanti concentrate. L'applicazione di tale metodo richiede l'introduzione di due nuove specie di numeri, i pseudocomplessi e gli ipercomplessi, di cui vengono indicate le proprietà e le regole di calcolo.

Alcuni esempi, tratti dal campo dell'elettrotecnica, chiariscono le modalità di applicazione del metodo proposto.

Processo verbale dell'adunanza del dì 9 novembre 1940-XIX.

Presidenza del sen. De Lorenzo. Sono presenti i soci ordinari Bakunin, Caccioppoli, Carnera, Carrelli, Colamonico, D'Erasmo (segretario), Diamare, Giordani, Longo, Malquori, Pierantoni, Ricci ed i corrispondenti nazionali Andreoli e Nobile.

Il presidente saluta i soci, lieto di rivederli tutti dopo 4 mesi di vacanza, e ricorda che in questi 4 mesi l'Accademia ha continuato regolarmente a funzionare, curando, ad opera del Segretario, la stampa del Rendiconto, di cui nella prossima adunanza, sarà presentato il vol. X della 4ª serie; attendendo alla compilazione dell'Annuario per l'anno XIX, che sarà anch'esso presto pubblicato; e provvedendo alla fabbricazione della carta per gli Atti, dei quali si può subito cominciare la pubblicazione del volume II della 3ª serie. Inoltre durante questi mesi, per una generosa elargizione della benemerita Direzione generale del Banco di Napoli, si è potuta fare la scaffalatura della nuova grande sala centrale della Società, destinata ad accogliere le pubblicazioni di tutte le Accademie italiane ed a costituire la sala di consultazione e di studio per i frequentatori della Biblioteca della Società stessa. Così, durante questo periodo, la Società si è uniformata alla vita di tutta la nazione, che ha continuato nella sua opera di lavoro e di pace, mentre i suoi figli, ai quali si manda un reverente e devoto saluto, combattono dalle cime delle Alpi ai deserti dell'Africa, dall'Oceano Atlantico all'Oceano Indiano, per terra, per mare e nell'aria.

Il Segretario informa, che il Ministro dell'Educazione Nazionale con lettera del 27 settembre scorso ha consentito la nomina del prof. Ignazio Azevedo do Amaral a socio corrispondente straniero nella sezione di scienze matematiche. Indi comunica che, in base all'art. 22 dello Statuto, il presidente ha fissato i seguenti giorni per le tornate ordinarie del nuovo anno accademico: novembre 9, dicembre 7, gennaio 4, febbraio 1°, marzo 1°, aprile 5, maggio 3 e giugno 7. Legge quindi la circolare ministeriale 22 luglio 1940-XVIII, relativa alla sospensione dei concorsi a premio banditi o da bandire da parte del Ministero, nonchè delle Accademie e degli altri corpi scientifici e letterari.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio vengono segnalati alcuni gruppi di lavori inviati dall'Istituto Nazionale Galileo Ferraris di Torino, e dall'Istituto per le applicazioni del calcolo di Roma.

Il socio Ecc. Longo presenta ed offre in omaggio un suo recente scritto sopra *Domenico Vandelli e la fondazione del primo Orto botanico nel Portogallo*, discorrendone brevemente. Il presidente ringrazia.

Il socio Pierantoni presenta una memoria del prof. Arturo Palombi

dal titolo: *Eusicyonia carinata Olivi: apparecchio digerente, branchiale e sessuale*, accompagnata da sette tavole, delle quali una a colori, proponendone l'accoglimento per la stampa nel nuovo volume degli Atti. L'Accademia a voti unanimi accoglie tale proposta, destinando un contributo di L. 2500.— per la esecuzione delle illustrazioni.

Il socio D'Erasmo presenta, pure per gli Atti, una sua memoria dal titolo: *Di Niccolò Braucci da Caivano (1719-1774) e della sua opera inedita dal titolo: Istoria naturale della Campania sotterranea.* L'Accademia approva.

Il socio corrispondente Andreoli presenta una nota del dott. Lucio Vallese sopra *Nuovi metodi simbolici in elettrotecnica*, proponendone la inserzione nel Rendiconto. L'Accademia approva.

Lo stesso socio Andreoli presenta, per il Rendiconto, una sua nota su *Elementi matematici di base per una teoria delle collettività secondo la genetica.*

Il socio Carrelli presenta una nota del dott. Giuseppe Cena *Sull'assorbimento ottico nel visibile di ossidi e solfati di praseodimio, neodimio ed erbio;* ed il socio Ricci presenta una nota del dott. Camillo Zocchi sopra *Nuovi esperimenti di usura sulle «scarpe» per le funi portanti delle funivie.* Entrambe le note vengono accolte per la stampa nel Rendiconto accademico.

Processo verbale dell'adunanza del dì 7 dicembre 1940-XIX.

Assistono all'adunanza, presieduta dal sen. De Lorenzo, i soci ordinari Bakunin, Caccioppoli, Carnera, Colamonico, D'Erasmo (segretario), Diamare, Longo, Malquori, Ricci ed i corrispondenti nazionali Andreoli, De Dominicis, e Gallucci.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 9 novembre, che è approvato. Indi presenta il volume del Rendiconto dell'anno accademico 1939-1940 (XVIII) e comunica l'avviso inviato dalla Pontificia Accademia delle Scienze, circa il conferimento del Premio biennale Pio XII di lire 50.000, che sarà aggiudicato nel prossimo anno 1941.

Il presidente è sicuro d'interpretare il sentimento di tutti i soci, esprimendo auguri di guarigione al collega Eccellenza Filippo Bottazzi, recentemente operato di tracheotomia, e prega la socia Bakunin di volerglieli trasmettere di persona.

Il segretario legge la *Relazione sull'attività accademica dell'anno 1939-40 (XVIII)*, che verrà stampata nel Rendiconto.

Il socio Malquori presenta una nota dei dottori Giuseppe Zaffuto e Antonio Giannone dal titolo: *Contributo alla conoscenza di alcuni materiali silicei nazionali*, e un'altra del dott. Vittorio Cirilli, riflettente *In-*

dagini sulle terre refrattarie di Fiano Romano, proponendo per entrambe la inserzione nel Rendiconto accademico.

Uguale proposta di stampa nel Rendiconto fa il socio corrispondente Gallucci, presentando una nota del prof. Federico Amodeo sopra *Il problema della gonalità.*

L'Accademia unanime approva la stampa dei tre predetti lavori con le limitazioni in vigore.

Processo verbale dell' adunanza del dì 4 gennaio 1941 - XIX.

Assistono all'adunanza, presieduta dal sen. De Lorenzo, i soci ordinari Bakunin, Caccioppoli, Carnera, Colamonico, D'Erasmo (segretario), Diamare, Longo, Malquori, Pierantoni, Signorini ed i corrispondenti nazionali De Dominicis, Nobile e Pascal.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 7 dicembre, che è approvato.

La socia Bakunin esprime i ringraziamenti del collega Bottazzi per l'interessamento preso dall'Accademia alla salute di lui.

Il socio Malquori presenta una nota del dott. Vittorio Cirilli, *Sulla costituzione dei tufi bianchi della Solfatara di Pozzuoli, e di materiali geneticamente simili provenienti dall'isola d'Ischia,* e ne parla, proponendo l'accoglimento di essa per la stampa nel Rendiconto. L'Accademia unanime approva.

Processo verbale dell'adunanza del dì 1° febbraio 1941 - XIX.

Assistono all'adunanza, presieduta dal sen. De Lorenzo, i soci ordinari Bakunin, Caccioppoli, Carnera, Colamonico, Diamare, Longo, Pierantoni, Ricci e D'Erasmo (segretario).

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza del 4 gennaio, che risulta approvato. Indi presenta l'Annuario per l'anno 1940-41- XIX della Società Reale di Napoli, in corso di distribuzione ai soci.

Il socio Diamare offre all'Accademia due lavori, riguardanti ricerche di anatomia umana che si riannodano ad interessanti questioni di fisiologia, compiuti nell'Istituto da lui diretto e recentemente pubblicati. Uno di essi, dovuto al dott. Vittorio Mesolella, riguarda una laboriosa indagine sul cosidetto ramo vestibolare del nervo cocleare, con la categorica conclusione che esso non è altro che un filuzzo dello stesso nervo vestibolare, distinto dal grosso del nervo e che si unisce poi, insieme con questo, al cocleare per formare il nervo acustico. L'altro lavoro, frutto delle ricerche del dott. Oreste Attilio Armenio, si riferisce ad un interessante

capitolo della fisiologia umana dell'orecchio interno, e propriamente alla discussa funzione e morfologia del sacco endolinfatico, negandovi la presenza di otoliti e di zone pigmentate dell'epitelio, di cui era stato fatto cenno in alcune pubblicazioni, rilevando in due soli casi la presenza dei canalicoli del Cotugno, e notando in numerosissimi altri delle particolari formazioni nastriformi, finora non descritte da altri. Di entrambi questi lavori il socio Diamare dà particolareggiate notizie, riflettenti i metodi d'indagine, le osservazioni compiute e la discussione dei risultati raggiunti: notizie, che vengono pubblicate a parte nel Rendiconto.

Il socio Pierantoni informa, che il 7 febbraio, alle ore 15,30, nell'aula magna della R. Università avrà luogo la solenne celebrazione del centenario della nascita di Antonio Dohrn, promossa dalla Facoltà di Scienze e con l'adesione del Podestà di Napoli, essendo oratore il prof. Alessandro Ghigi, rettore della R. Università di Bologna. Egli invita i colleghi a volervi partecipare. Il Presidente, a nome dei soci, ringrazia.

Processo verbale dell' adunanza del dì 1° marzo 1941 - XIX.

Presidenza del sen. De Lorenzo. Sono presenti i soci ordinari Bakunin, Caccioppoli, Carnera, Colamonico, D'Erasmo (segretario), Diamare, Longo, Malquori, Pierantoni, Ricci ed i soci corrispondenti nazionali Andreoli, De Dominicis e Nobile.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 1° febbraio, che è approvato.

Il presidente comunica la morte, avvenuta in Napoli il 17 febbraio scorso, del socio corrispondente Generoso Gallucci; e dopo aver ricordato brevemente le qualità dell'uomo, probo e buono, e dello scienziato, che al largo sapere matematico univa una profonda cultura umanistica, annunzia che una commemorazione del compianto consocio sarà prossimamente tenuta dal socio Andreoli.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio, il segretario segnala un cospicuo numero di lavori eseguiti nell'Istituto di Istologia, Embriologia e Fisiologia generale della R. Università di Napoli, offerto dal socio Diamare. Il presidente, a nome dei colleghi, ringrazia.

Il socio corrispondente Andreoli presenta una nota del dott. Guido Barba, *Sulla configurazione dei cerchi osculatori e delle sfere osculatrici*, e ne parla, proponendo l'inserzione di essa nel Rendiconto. L'Accademia approva.

Processo verbale dell' adunanza del dì 5 aprile 1941 - XIX.

Assistono all'adunanza, presieduta dal sen. De Lorenzo, i soci ordinari Bakunin, Caccioppoli, Carnera, Colamonico, D'Erasmo (segretario), Diamare, Malquori, Pierantoni, Ricci e il socio corrispondente Nobile.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 1° marzo, che è approvato. Indi presenta la memoria del prof. Arturo Palombi sopra la *Eusicyonia carinata (Olivi)*, di cui è stata recentemente ultimata la stampa, e comunica la Ministeriale 2 aprile, relativa alle nuove disposizioni riguardanti i concorsi a premio. Poichè il Ministero avverte che, a modifica delle disposizioni precedentemente emanate, può essere ora consentita l'autorizzazione a bandire determinati concorsi a premi accademici, autorizzazione da concedersi caso per caso, l'Accademia fa voti perchè la presidenza della Società Reale ottenga il consenso a riaprire i diversi bandi di concorso a premio e a giudicare quelli scaduti, analogamente a quanto hanno recentemente praticato la R. Accademia d'Italia ed altri Enti culturali.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio sono segnalati il volume del socio Armellini dal titolo *Astronomia e Geodesia*, la commemorazione di Pietro Romualdo Pirotta offerta dal consocio Longo, varie pubblicazioni dell'Istituto Nazionale Elettrotecnico «Galileo Ferraris» di Torino, e una copia dell'antico e ormai introvabile Statuto della R. Accademia delle Scienze e delle Belle Lettere di Napoli dell'anno 1780, offerto dal socio Pierantoni. Il presidente, a nome dell'Accademia, ringrazia i donatori.

Il socio Caccioppoli presenta una nota del prof. Antonio Colucci dal titolo: *Sulla rappresentazione conforme delle superfici rettificabili*, e ne propone l'inserzione nel Rendiconto. L'Accademia approva.

Il socio Malquori presenta una nota dei dottori Vittorio Cirilli e Antonio Giannone *Sulla presenza di β- e α- cristobalite in alcuni campioni di opale*, e ne discorre, proponendo l'accoglimento di essa nel Rendiconto. L'Accademia approva.

Viene poi accolta, su proposta del socio Carnera, la stampa nello stesso periodico della nota del dott. Tito Nicolini sopra le *Variazioni di altezza della cromosfera solare.*

Infine lo stesso socio Carnera presenta, per il Rendiconto, una sua nota sopra *La latitudine della Specola di Capodimonte*, riassuntiva di più ampia memoria presentata alla R. Accademia d'Italia.

Processo verbale dell'adunanza del dì 3 maggio 1941 - XIX.

Presiede il sen. De Lorenzo. Sono presenti i soci ordinari Bakunin, Carnera, Colamonico, D'Erasmo (segretario), Diamare, Longo, Pierantoni, Ricci ed i soci corrispondenti nazionali Andreoli, De Dominicis e Nobile.

Il segretario legge il processo verbale della tornata 5 aprile, che è approvato. Indi presenta la memoria G. D'Erasmo, *Di Niccolò Braucci da Caivano (1719-1774) e della sua opera inedita dal titolo: Istoria naturale della Campania sotterranea*, di cui è stata recentemente ultimata la stampa nel volume in corso degli Atti.

Il socio Andreoli presenta una memoria dell'ing. Lucio Vallese sopra *Un metodo simbolico generale per la trattazione dei fenomeni di regime variabile nei sistemi lineari a costanti concentrate*, e ne propone l'accoglimento per la stampa nel volume degli Atti. L'Accademia stabilisce di votare su questa proposta nella prossima adunanza.

Lo stesso socio Andreoli presenta, per il Rendiconto, una sua nota *Sull'equazione di Stiefel ed altre analoghe.*

Processo verbale dell'adunanza del dì 7 giugno 1941 - XIX .

Presiede il presidente sen. De Lorenzo. Sono presenti i soci ordinari Bakunin, Caccioppoli, Carnera, Carrelli, Colamonico, D'Erasmo (segretario), Diamare, Longo, Malquori, Picone, Pierantoni, Ricci, e i soci corrispondenti nazionali Andreoli e De Dominicis.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 3 maggio, che è approvato. Indi comunica la ministeriale 5 maggio, relativa alla sospensione dei concorsi a premio, e segnala, fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio, il 3° fascicolo dell'opera *Termotecnica* e il volume dal titolo: *Resistenza organica delle caldaie*, inviati dal consocio Brunelli.

Il presidente, nel chiudere l'anno accademico in corso, si fa interprete del sentimento dei soci, esprimendo la profonda devozione dell'Accademia per la Maestà del Re Imperatore e la sua devota riconoscenza per il Duce, costruttore della nuova grandezza d'Italia, e per i fratelli in armi, che insieme con gli alleati germanici combattono, muoiono e vincono, per conquistare all'Italia ed alla Germania la completa indipendenza e per far sempre fiorire la civiltà italiana e la germanica, che hanno illuminato, illuminano e illumineranno per secoli tutta la terra.

Il socio D'Erasmo presenta, per gli Atti, una sua memoria sopra *L'ittiofauna cretacea dei dintorni di Comeno nel Carso triestino* e ne discorre brevemente. L'Accademia unanime accoglie l'inserzione di tale

lavoro, e delle tavole e figure intercalate che l'accompagnano, nel volume degli Atti in corso di pubblicazione.

Lo stesso socio D'Erasmo presenta una memoria del dott. Giuseppe Mirigliano riguardante *Avanzi di vertebrati quaternari di Melpignano (Lecce),* proponendo l'accoglimento di essa per la stampa negli Atti accademici. L'Accademia approva, fissando un contributo non superiore alle L. 600 per le relative illustrazioni.

Il socio Ricci presenta, per il Rendiconto, una nota dell'ing. Franco Jossa dal titolo: *Calcolo statico di prismi costituiti da materiali che non seguano la legge di Hooke,* e una nota del prof. Adriano Galli sulla *Instabilità nell'arco con spinta eliminata,* proponendo che vengano entrambe accolte per la stampa. L'Accademia approva.

Uguale proposta d'inserzione nel Rendiconto fa il socio Picone, presentando la nota del signor Gaetano Fichera, *Decomposizione al modo di Poincarè delle funzioni bi-iperarmoniche in due variabili.* L'Accademia approva.

Il socio corrispondente Andreoli presenta, per il medesimo periodico, una sua nota dal titolo: *Statistica di configurazioni.*

Indi il socio D'Erasmo propone che venga inserita nel Rendiconto accademico una nota del prof. Antonio Scherillo: *Cristalli di hauerite con simmetria pentagonododecaedrica tetraedrica.* L'Accademia unanime approva.

Su proposta dei soci corrispondenti Andreoli e Focaccia, l'Accademia delibera di accogliere, per la stampa negli Atti, la memoria dell'ing. Lucio Vallese sopra *Un metodo simbolico generale per la trattazione dei fenomeni di regime variabile nei sistemi lineari a costanti concentrate,* a condizione che ne vengano stralciate, o sommariamente riassunte, le parti già trattate nel precedente lavoro (Rend. Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, 1940-41).

Il socio Carnera presenta, per l'inserzione nel Rendiconto, una sua nota sopra *Le variazioni della latitudine dedotte dalle Stazioni internazionali nel 1935 e nel 1940.*

Alle ore 11,50' il presidente dichiara chiusa l'adunanza pubblica ed invita i soli soci ordinari a trattenersi, secondo l'ordine del giorno, per l'applicazione degli art. 12 e 13 del vigente Statuto e 28 del Regolamento.

Risultano presenti il presidente De Lorenzo e i soci ordinari Bakunin, Cacciopoli, Carnera, Carrelli, Colamonico, D'Erasmo (segretario), Diamare, Longo, Malquori, Picone, Pierantoni, Ricci, che raggiungono il numero legale.

La sezione di scienze naturali propone come soci corrispondenti nazionali i professori Giuseppe Imbò, Ferdinando Milone e Mario Salfi.

La sezione di scienze matematiche propone come soci corrispondenti

nazionali i professori Gabriele Mammana, Gian Domenico Mattioli, Modesto Panetti e Niccolò Spampinato.

Su tali proposte si procede alla votazione dei singoli nomi, che risultano tutti approvati alla unanimità.

Quindi la R. Accademia di Scienze fisiche e matematiche della Società Reale di Napoli designa quali soci corrispondenti nazionali nella Sezione di scienze naturali i seguenti:

1 — Imbò prof. Giuseppe,
2 — Milone prof. Ferdinando,
3 — Salfi prof. Mario;

e come soci corrispondenti nazionali nella Sezione di scienze matematiche i seguenti:

1 — Mammana prof. Gabriele,
2 — Mattioli prof. Gian Domenico,
3 — Panetti prof. Modesto,
4 — Spampinato prof. Niccolò.

Tali designazioni approvate dalla Classe saranno comunicate, dal Presidente della Società Reale di Napoli, al Ministero per l'Educazione Nazionale per l'autorizzazione prescritta dall'art. 14 dello Statuto.

Opere ed Opuscoli ricevuti in dono dagli autori o editori dal 29 ottobre 1940 al 28 ottobre 1941.

L' inserzione nel presente elenco valga come ringraziamento ai donatori.

1. Abbolito E., Relazione preliminare sui giacimenti di sabbie ferrifere italiane — Roma, 1941.
2. Åberg E., The taxonomy and phylogeny of *Hordeum L. Sect. Cerealia Ands*, with special reference to thibetan Barleys. — Uppsala, 1940.
3. Accarino S., Qualche nota critico-sintetica sulla istofisiologia del corpo luteo — Pisa, 1937.
4. Angelini F., Genesi delle melanine (Rivista sintetica) — Napoli, 1940.
5. Armellini G., Astronomia e Geodesia. — Milano, 1941.
6. Armenio O. A., Ricerche istologiche sul sacco endolinfatico dell' uomo. — Napoli, 1940.
7. Basile I., Alcune ricerche sperimentali sulla porzione secernente dell'epitelio mesofrenico (Rana). — Torino, 1939.
8. Brunelli P. E., Alcune conseguenze strutturali dell'evoluzione delle caldaie a vapore. — Torino, 1939.
9. » » » Resistenza organica delle caldaie (II ediz.). — Torino, 1940
10. » » » Termotecnica - parte prima, fasc. 3°, — Torino, 1940.
11. Calendoli A., Sul «Glomerulogeno» delle capsule surrenali di *Delphinus delphis* L. — Torino, 1940.
12. Cardinale I., Le proprietà ottiche delle bande fondamentali nei muscoli striati irradiati con onde corte. — Torino, 1939.
13. Carrer A., Elementi della teoria generale della metadinamo. — Milano, 1939.
14. » » La dinamo Rosenberg a campo trasversale. — Milano, 1940.
15. » » Metadinamo a tre spazzole. Teoria e prove. — Milano, 1940.
16. » » Prove sulla metadinamo a otto con un collettore e carichi squilibrati. — Milano, 1940.
17. » » Studio delle specie di metatrasformatrici usate nella trazione. — Milano, 1940.
18. Castellano di S. Sergio G., La scoperta dell'aerostato e l'opera scientifica e storica di Tiberio Cavallo. — Roma, 1941.
19. Chiodi C. e Zerbini V., Influenza della lavorazione meccanica della pressione e della temperatura sulle caratteristiche dei lamierini di materiale ferromagnetico. — Milano, 1940.

20. Chiodi C., I) Influenza della lavorazione meccanica sulle caratteristiche dei lamierini di materiale ferromagnetico.
II) Settimana di studio sui problemi di elettromeecanica presso l'I. E. N. G. F. — Torino, 1938-1939.
21. Chieffi R., Sulla costituzione e valore dei mitocondri. (Rivista sintetica). — Napoli, 1938.
22. Cipria G., Nuovo contributo alla conoscenza delle uova e dello sviluppo post-embrionale di *Molva elongata* Risso. — Venezia, 1940.
23. Deaglio R., I fondamenti della colorimetria tricromatica moderna in particolare del sistema C. I. I. 1931. — Torino, 1940.
24. » » La X Riunione plenaria della Commissione Internazionale dell'Illuminazione (C. I. E.). Milano, 1939. — Sull'effetto fotoelettrico Hallwachs a temperature elevate. — Torino, 1940.
25. De Gaetani D., Morfologia del Cranio di *Heliastes chromis* Gthr, — Venezia, 1940.
26. De Gregorio G., Sul singolare reperto di globi colloidi sulla superficie di un'ovaia umana. — Pompei, 1938.
27. Deimler E., Über Di - aroyl - hydrochinone. — Erlangen, 1940.
28. Del Vecchio G, Sui reperti di fibre muscolari striate nell'epifisi cerebrale. Qualche osservazione in rapporto alla nota del Dott. Godina. — Firenze, 1939.
29. » » A proposito di fibre striate nell'epifisi cerebrale umana. Seconda risposta al Dott. G. Godina. — Napoli, 1940.
30. D'Errico L., Su dati istiofisiologici ed embriologici del tessuto insulare del pancreas. — Torino, 1940.
31. De Seras L., La probabilità di scarica degli impulsi di tensione a fronte ripido. — Milano, 1940.
32. Diamare V., Ancora sulla birefrazione delle fibre muscolari striate (anche cardiache) e delle cellule dei cordoni di Purkinje. (Risposta al Prof. W. J. Schmidt in Giessen). — Firenze, 1938.
33. » » Esperienze ed osservazioni ottiche sulla mielina dei nervi dopo osmiazione ed ossigenazione.
34. » » L'anatomia comparata (2° articolo critico). — Napoli, 1938.
35. » » Salvatore Trinchese. Commemorazione. — Pompei, 1939.
36. » » Sessualità « intersesso » e la questione di un ormone interstiziale (Conferenza). — Napoli, 1935.
37. » » Sullo sviluppo del cuore e dei grossi vasi in rapporto a qualche anomalia. — Pompei, 1937.
38. Di Lauro E., Particolari aspetti sperimentali e clinica della tubercolosi in Otorinolaringoiatria. — Pompei, 1939.
39. Di Vico A., Sull'influenza delle onde corte sul sistema nervoso. Prime indagini sul mesencefalo. — Napoli, 1939.
40. Egidi C., Prove sui ricevitori radiofonici. Determinazioni generali e misure sul complesso di bassa frequenza. — Torino, 1940.

41. Egidi C., Tensiometro a nastro vibrante a lettura diretta. — Torino, 1939.
42. Eriksson A., An investigation of the P-terms for Helium. — Uppsala, 1940.
43. Falkner F., Beiträge zur Agrargeographie der afrikanischen Trockengebiete. — Basel, 1939.
44. Faulstich H., Sulla stabilità di frequenza degli oscillatori a transconduttanza differenziale negativa. — Torino, 1939.
45. Ferrari-Toniolo A., Accoppiamento di bipoli e quadripoli e adattamento di impedenze. — Torino, 1939.
46. » » » Apparecchiatura per la registrazione automatica di livello fino a 40000 Hz. — Torino, 1939.
47. » » » Nomenclatura relativa alle comunicazioni elettriche. — Simboli letterari per la trattazione di comunicazioni elettriche. — Torino, 1940.
48. » » » Prove telefonometriche su impianti di diffusione sonora. — Torino, 1940.
49. » » » Telefonia fra ambienti rumorosi e prove su laringofoni. — Torino, 1940.
50. Franchino A., Rapporti tra lo sviluppo delle gemme e la neoformazione di radici nelle talee di viti. — Roma, 1940.
51. Francini G., Contributo allo studio del comportamento dei Wattmetri elettrostatici. — Torino, 1940.
52. Franzì L., Di un gran dimenticato. Commemorazione di Giambattista della Porta. — Pompei, 1939.
53. » » Sul comportamento ottico della lecitina dopo azione dei veleni di vipera Aspis e di Crotalus Terrificus. — Rocca S. Casciano, 1940.
54. Fresa A., Cenni sui calendari e tavola del calendario della Chiesa romana. — Firenze. 1941.
55. Fresa A., Vergnano A. M. e Missana-Rùdari N., Osservazioni di comete e di piccoli pianeti, al R. Osservatorio Astronomico di Torino (Pino Torinese) nell'anno 1940. — Torino, 1941.
56. Geracitano A., Sui caratteri ottici e differenziali dei pigmenti di milze malariche. — Napoli, 1938.
57. Gigli A., L'assorbimento acustico delle persone e l'acustica delle sale. — Torino, 1940.
58. » » Schema di teoria e di classificazione dei microfoni. — Torino, 1939.
59. Guarini E., Erroneità del secondo principio di termodinamica. L'utilizzazione del calore ambiente come forza motrice. Il movimento perpetuo di seconda specie. — Milano, 1941.
60. Iesu G., Ricerche sulla colemia sperimentale (III. Tiroide e surrenali). — Rocca S. Casciano, 1936.
61. » » Ricerca sulla colemia sperimentale. (IV. Il comportamento dell'osso. — Rocca S. Casciano, 1936.

62. Iesu C., Ulcere duodenali consecutive ad esclusione sperimentale della bile. — Bologna, 1937.
63. Internicola P., Esperienze sul comportamento dell'ovaia e del pancreas e delle vie biliari nella colemia sperimentale. — Pompei, 1939.
64. Johansson J., Anatomische studien über die Gastropodenfamilien rissoidae und littorinidae. — Uppsala, 1939.
65. Holm Å., Studien über die Entwicklung und Entwicklungsbiologie der Spinnen. — Uppsala, 1940.
66. Kingstom J., A lei estatística da demanda do café. — Rio de Janeiro, 1939.
67. Kreuzer G., Das Problem der nacheiszeitlichen Landschaftsgeschichte im Gebiet des Steigerwaldes. — Rothenburg ob der Tauber, 1938.
68. Kühnreich B., Sekundär-Emission von Isolatoren und Leuchstoffen bei Elektronengeschwindigkeiten bis 60 kv. — Erlangen, 1939.
69. Lind C. E., Untersuchungen über die rationalem Punkte der Ebenen Kubischen Kurven vom geschlecht eins. — Uppsala, 1940.
70. Lombardi P., Equilibrio e sensibilità di ponti per misure di impedenza. — Torino, 1940.
71. » » I. E. N. G. E. Visite e date memorabili. — Roma, 1940.
72. Longo B., Domenico Vandelli e la fondazione del primo Orto Botanico nel Portogallo. — Roma, 1940.
73. » » Pietro Romualdo Pirotta. — Roma, 1941.
74. Lo Nigro G., I lipoidi dal punto di vista istologico e loro valore istofisiologico. — Torino, 1940.
75. Lunell E., Liniengeometrische studien, mit besonderer Rücksicht auf Regelflächen mit vollständigem zerfalle der Doppelkurve. — Uppsala, 1940.
76. Madella G. B., Campione di alta precisione della normale. — Torino, 1939.
77. Malusardi F., Misura dell'angolo di coppia sulle macchine sincrone. — Milano, 1940.
78. » » Studio delle linee di contatto per trazione. Ripercussioni dell'adozione del sistema metadinamo sulle linee di alimentazione per trazione. — Milano, 1940.
79. Manfrino R., Caratteristiche logaritmiche di raddrizzatori a secco e loro applicazione a strumenti di misura. — Torino, 1940.
80. Martillotti F., Osservazioni istologiche sulle gonadi di feti e neonati. — Pompei, 1940.
81. Mesolella V., Sul cosiddetto ramo vestibolare del cocleare e sul suo ganglio (ganglio di Böttcher). Ricerche nell'uomo. — Firenze, 1941.
82. » » Sulla questione delle fibre simpatiche nella branca vestibolare dell'acustico. Ricerche nell'uomo. — Napoli, 1940.
83. Morica A., Contributo all'istofisiologia dei corpi lutei atresici (ricerche nella vacca). — Firenze, 1940.
84. Nilsson G., Erklärung eines Phänomens der Statischen Elektrizität — Stockholm, 1938.

85. Nuzzi O., Contributo alla conoscenza anatomica ed isto-patologica del « glomo neuro-vascolare » degli arti. — Rocca S. Casciano, 1940.
86. Passarelli G., Mastzellen e cellule tiazinofile nelle condizioni normali e patologiche dell'apparato genitale femminile umano. — Firenze, 1940.
87. Pestarini M. G., Contributo allo studio dei sistemi elettrici polifasi per mezzo dell'analisi in sistemi simmetrici. — Torino, 1939.
88. » » » Contributo allo studio della commutazione nelle macchine elettriche. — Torino, 1939.
89. » » » Note sul probabile sviluppo della trazione elettrica. — Milano, 1940.
90. Pinciroli A., Amplificazione di potenza a frequenza acustica. — Torino, 1939.
91. » » Produzione é misura di piccole tensioni a radio frequenza. — Torino, 1939.
92. » » Rilevatori fonografici elettromagnetici. — Torino, 1939.
93. Pinciroli A. e Francini G., Wattametri per frequenze acustiche. — Torino, 1940.
94. Rieder H., Über die Konstitution von Impletot, Veramon und Theobromincalcium — Calciumnitritin gelöstem Zustande. — Erlangen, 1940.
95. Rodio G., Contributo allo studio della Flora pugliese. — Napoli, 1940.
96. Rodinò D., Ricerche sulla castrazione sperimentale, 1° Le modificazioni della cistifellea. — Siena, 1937.
97. » » Ricerche sulla castrazione sperimentale. (II. Il pancreas dopo la castrazione). — Firenze, 1936.
98. » » Ricerche sulla castrazione sperimentale. (III. Le modificazioni della tiroide). — Firenze, 1937.
99. » » Sulla questione della presenza di fibre simpatiche nella corda primaria inferiore del plesso brachiale. (Contributo alla patogenesi dei disturbi neuro-vascolari in caso di costola cervicale). — Rocca S. Casciano, 1939.
100. Salvi P., Studi sull'ofidismo sperimentale. (III. La proteolisi da veleno di viperidi). — Napoli, 1938.
101. Sant'Elia R., Riflessioni sui corpuscoli di Hassal del Timo sulla loro struttura, origine e significato fisiologico. — Napoli, 1939.
102. Saporito M. T., Il cervelletto in animali trattati con onde corte (nota riassuntiva). — Napoli, 1940.
103. Schultz K. H., Waldbestand und Forstwirtschaft im südwestlichsn Mecklenburg vom 16. bis 18. Jahrhundert. — Schwerin, 1940.
104. Serpico M., Sulla lisocitina e la patogenesi dell'intossicazione ofidica (Rivista sintetica). — Fidenza.
105. Spartà A., Contributo alla conoscenza dello sviluppo embrionale e postembrionale nei *Murenoidi*. — Venezia, 1940.
106. Starace R., Contributo allo studio della vitalità e regressione dei trapianti di tessuti non vascolarizzati. (Trapianti omoplastici di cartilagine nel

confronto con trapianti di tessuti vascolarizzati [fegato]). — Torino, 1937.

107. Striani M. R.. Sulla cromaffinità di epiteli mesofrenici e sul cosidetto pigmento renale. Contributo sperimentale all'istofisiologia del rene medio. — Torino, 1938.

108. Tabaracci C., Proprietà elettriche di alcuni dielettrici solidi. — Milano, 1939.

109. Tangari C., Prime indagini istologiche sul meccanismo di azione dell'ormone follicolare e della vitamina antiscorbutica sui processi ulcerosi della mucosa gastrica umana. — Rocca S. Casciano, 1939.

110. Thorslund P., On the chasmops series of Jemtland and Södermanland (Tväreu). — Stockholm, 1940.

111. Toniolo S. B., Metadinamo a due collettori inserita a caduceo. — Rilievi su una macchina sperimentale (300 A, 250 V.). — Milano, 1940.

112. » » » Prove su motori a induzione con avvolgimento in alluminio. — Milano, 1939.

113. Tyrén F., Precision measurements of Soft x-Rays with concave grating. — Uppsala, 1940.

114. Vallauri G., Attività dell'I. E. N. G. F. nel suo quinto anno di vita (1938-39 XVII). — Roma, 1940.

115. Vanäs E., A spectrophotometric study of Star in *Cygnus*. — Uppsala, 1939.

116. Volta L., George Ellery Hale. 1868-1938. — Torino, 1941.

117. Weickenmeir J., Über das Berberin mit besonderer Berücksichtigung seiner oxydativen Überführung in das Hydrastinin. — Erlangen, 1940.

INDICE DEL VOLUME

G. D' Erasmo — Relazione sui lavori compiuti dalla R. Accademia di Scienze fisiche e matematiche durante l' anno 1939-1940 (XIX) . . . . . pag. 3

G. Cena — Sull' assorbimento ottico nel visibile di ossidi e solfati di praseodimio, neodimio ed erbio . . . . . » 10

L. Vallese — Nuovi metodi simbolici in elettrotecnica . . . » 15

G. D' Erasmo — Di Niccolò Braucci da Caivano (1719-1774) e della sua opera inedita dal titolo: Istoria naturale della Campania sotterranea. *(Sunto della memoria inserita nel vol. II, serie 3., degli Atti)* . . . . . » 28

A. Palombi — Eusicyonia carinata (Olivi): apparecchi digerente, branchiale e sessuale; anatomia, fisiologia, sviluppo ed anomalie in rapporto cogli altri crostacei decapodi. *(Sunto della memoria inserita nel vol. II, serie 3., degli Atti)* » 30

G. Zaffuto e A. Giannone — Contributo alla conoscenza di alcuni materiali silicei nazionali . . . . . » 31

V. Cirilli — Indagini sulle terre refrattarie di Fiano Romano . » 37

F. Amodeo — Il problema della gonalità . . . . . » 41

V. Cirilli — Sulla costituzione dei tufi bianchi della solfatara di Pozzuoli, e di materiali geneticamente simili provenienti dall' isola d' Ischia . . . . . » 73

V. Diamare — Di recenti indagini sull' orecchio interno umano . » 77

G. Barba — Sulla configurazione dei cerchi osculatori e delle sfere osculatrici. . . . . » 81

A. Colucci — Sulla rappresentazione conforme delle superficie rettificabili. . . . . » 93

V. Cirilli e A. Giannone — Sulla presenza di β- e α- cristobalite in alcuni campioni di opale . . . . . » 99

T. Nicolini — Variazioni di altezza della cromosfera solare . . » 105

L. Carnera — La latitudine della Specola di Capodimonte . . » 112

F. Jossa — Calcolo statico di prismi costituiti da materiali che non seguano la legge di Hooke . . . . . » 115

A. Galli — Instabilità nell' arco con spinta eliminata. . . . . » 129

G. Fichera — Decomposizione al modo di Poincaré delle funzioni bi-iperarmoniche in due variabili . . . . . » 134

C. Zocchi — Nuovi esperimenti di usura sulle « scarpe » per le funi portanti delle funivie . . . . . » 149

G. Andreoli —Statistica di configurazioni. (Ricerche su coppie di variabili casuali in correlazione) . . . . . pag. 150

A. Scherillo — Cristalli di Hauerite con simmetria pentagonododecaedrica tetraedrica . . . . . » 159

G. Andreoli — Elementi matematici di base per una teoria delle collettività secondo la genetica . . . . . » 165

L. Carnera — Le variazioni della latitudine negli anni 1935 e 1940 dedotte dalle osservazioni delle Stazioni internazionali » 166

G. Andreoli — Sull' equazione di Stiefel ed altre analoghe . . » 191

G. Mirigliano — Avanzi di vertebrati quaternari di Melpignano (Lecce). *(Sunto della memoria inserita nel vol. II, serie 3., degli Atti)* . . . . . » 191

L. Vallese — Sulla analisi dei fenomeni di regime variabile nei sistemi lineari a costanti concentrate. *(Sunto della memoria inserita nel vol. II, serie 3., degli Atti).* . . » 191

Processi verbali delle adunanze del 9 novembre, 7 dicembre 1940, 4 gennaio, 1. febbraio, 1. marzo, 5 aprile, 3 maggio e 7 giugno 1941 (XIX) . . . . . » 192

Opere ed opuscoli ricevuti in dono dagli autori o dagli editori dal 29 ottobre 1940 al 28 ottobre 1941 (XIX). . . . » 200

Indice del volume . . . . . » 206